



重點整理

- 對於 a 、 b 、 c 三個整數， $b \neq 0$ ，若 $a = b \times c$ ，則 a 是 b 的倍數， b 是 a 的因數。
- 一個正整數的個位數字為 0、2、4、6、8，則此正整數為 2 的倍數。
 - 一個正整數的個位數字為 0 或 5，則此正整數為 5 的倍數。
 - 一個正整數的末兩位數字是 00 或 4 的倍數，則此正整數為 4 的倍數。
 - 一個正整數的各個數字和是 9 的倍數，則此正整數為 9 的倍數。
 - 一個正整數的各個數字和是 3 的倍數，則此正整數為 3 的倍數。
 - 一個正整數的奇數位數字和與偶數位數字和的差為 11 的倍數或 0，則此正整數為 11 的倍數。
- 一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，沒有其他的因數，這個數稱為質數。
 - 一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，還有其他的因數，這個數稱為合數。
 - 1 不是質數也不是合數。
- 如果一整數的因數也是質數，則這個因數就是這個整數的質因數。
- 每一個合數都可以分解成它的質因數的連乘積，分解的過程稱為質因數分解。
- 將一個合數做質因數分解，寫成指數的形式，並將底數由小排到大，這樣的表示法稱為此合數的標準分解式。

題型演練

老師說

1. 因數與倍數的判別

學生做

已知 $3712\square$ 是一個五位數，其中 \square 為個位數，則：

- 當 $3712\square$ 是 3 的倍數時， $\square = ?$
- 當 $3712\square$ 是 5 的倍數時， $\square = ?$
- 當 $3712\square$ 是 11 的倍數時， $\square = ?$
- 當 $3712\square$ 是 4 的倍數時， $\square = ?$
- 當 $3712\square$ 是 8 的倍數時， $\square = ?$

解：(1) 因為 $3+7+1+2+\square=13+\square$

所以 $\square=2、5、8$

(2) $\square=0、5$

(3) 因為 $(3+1+\square)-(7+2)=\square-5$

所以 $\square=5$

(4) 因為 $2\square$ 為 4 的倍數

所以 $\square=0、4、8$

(5) 因為 $12\square$ 為 8 的倍數

所以 $\square=0、8$

已知 $4173\square$ 是一個五位數，則：

- 當它含有因數 2 時， $\square = ?$
- 當它含有因數 3 時， $\square = ?$
- 當它含有因數 5 時， $\square = ?$
- 當它含有因數 11 時， $\square = ?$
- 它是否含有因數 33？

解：(1) $\square=0、2、4、6、8$

(2) 因為 $4+1+7+3+\square=15+\square$

所以 $\square=0、3、6、9$

(3) $\square=0、5$

(4) 因為 $(4+7+\square)-(1+3)=7+\square$

所以 $\square=4$

(5) 由(2)、(4)得 $4173\square$ 不含有因數 33

(1) 設 $A=18 \times 19 \times 20 \times 21$ ，則 A 的標準分解式及相異質因數為何？

(2) 設 $B=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 29 \times 30$ ，則 B 的相異質因數共有多少個？

解：(1) 因為 $A=18 \times 19 \times 20 \times 21$

$$=(2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5) \times (3 \times 7)$$

所以 A 的標準分解式

$$=2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 19$$

A 的相異質因數有 2、3、5、7、19

(2) 依題意得所求為 1~30 的質數

所以 B 的相異質因數有

2、3、5、7、11、13、17、19、23、29
共 10 個

(1) 設 $A=34 \times 39 \times 44 \times 49$ ，則 A 的標準分解式及相異質因數為何？

(2) 設 $B=2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 48 \times 50$ ，則 B 的相異質因數共有多少個？

解：(1) 因為 $A=34 \times 39 \times 44 \times 49$

$$=(2 \times 17) \times (3 \times 13) \times (2^2 \times 11) \times 7^2$$

所以 A 的標準分解式

$$=2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$$

A 的相異質因數有 2、3、7、11、13、17

(2) 因為 $B=2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 48 \times 50$

$$=2^{25} \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 24 \times 25)$$

所以 B 的相異質因數有

2、3、5、7、11、13、17、19、23
共 9 個

(1) 若 50 可因數分解成 $a \times b$ ，其中 $a、b$ 均為正整數，則 $a+b=?$

(2) 已知 $c、d$ 皆為正整數，且 $c>d$ ，若 $c \times d=90$ ，且 $c-d=9$ ，則 $c、d$ 之值分別是多少？

解：(1) 因為 $50=1 \times 50=2 \times 25=5 \times 10$

所以 $a+b=51, 27$ 或 15

(2) 因為 $c \times d=90$ ，且 $c>d$

$\Rightarrow c、d$ 可能的值如下

c	90	45	30	18	15	10
d	1	2	3	5	6	9

又 $c-d=9$

所以 $c=15, d=6$

(1) 若 70 可因數分解成 $a \times b$ ，其中 $a、b$ 均為正整數，且 $a>b$ ，則 $a-b=?$

(2) 設長方形的長和寬分別是 c 和 d ，其中 $c、d$ 皆是正整數，且 $c>d$ ，若長方形的面積是 72 平方單位，周長是 44，則 $c、d$ 之值分別是多少？

解：(1) 因為 $70=70 \times 1=35 \times 2=14 \times 5$
 $=10 \times 7$

所以 $a-b=69, 33, 9$ 或 3

(2) 因為 $c \times d=72$ ，且 $c>d$

$\Rightarrow c、d$ 可能的值如下

c	72	36	24	18	12	9
d	1	2	3	4	6	8

又 $2c+2d=44 \Rightarrow c+d=22$

所以 $c=18, d=4$

小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，方法是：分別將月分與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得數字即為密碼(例如，生日若為 8 月 24 日，將 8 寫成 3 與 5 的和，24 寫成 11 與 13 的和，再將 3、5、11、13 相乘得密碼為 2145)。已知小華的密碼為 2030，則小華的生日為何？

解：因為 $2030 = 2 \times 5 \times 7 \times 29$

\Rightarrow 月分為 $5 + 7 = 12$

日期為 $2 + 29 = 31$

所以小華的生日為 12 月 31 日

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 2030} \\ 2 \overline{) 406} \\ 7 \overline{) 203} \\ \underline{\quad} \\ 29 \end{array}$$

傳說某古堡有億萬寶藏，必須輸入入門密碼才能進入寶庫取寶；已知入門密碼有四碼 $\overline{a} \overline{b} \overline{c} \overline{d}$ ，分別隱藏在 $289\overline{a} = 2^b \times c^2 \times d \times 23$ 的標準分解式中，則此入門密碼為何？

解：因為 $289\overline{a}$ 為 23 的倍數

$\Rightarrow a = 8$

所以 $289\overline{a} = 2898$

$$= 2 \times 3^2 \times 7 \times 23$$

\Rightarrow 此入門密碼為 8137

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 2898} \\ 3 \overline{) 1449} \\ 3 \overline{) 483} \\ 7 \overline{) 161} \\ \underline{\quad} \\ 23 \end{array}$$

小威把「9、15、21、65、91、169」這六個數分成兩組，使每一組有三個數，且各組中的三個數乘積相等，則 15 與哪兩個數同一組？

解：因為 $9 = 3 \times 3$ ， $15 = 3 \times 5$ ， $21 = 3 \times 7$

$$65 = 5 \times 13, 91 = 7 \times 13, 169 = 13 \times 13$$

\Rightarrow $\begin{cases} \text{質因數 } 3、13 \text{ 各有 } 4 \text{ 個} \\ \text{質因數 } 5、7 \text{ 各有 } 2 \text{ 個} \end{cases}$

\Rightarrow 每一組需 $\begin{cases} \text{質因數 } 3、13 \text{ 各 } 2 \text{ 個} \\ \text{質因數 } 5、7 \text{ 各 } 1 \text{ 個} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 9 \times 65 \times 91 &= 3^2 \times 5 \times 7 \times 13^2 \\ &= 15 \times 21 \times 169 \end{aligned}$$

\Rightarrow 15 與 21 和 169 同一組

有六張卡片，上面分別寫上 33、55、119、85、91、39 六個數，小風欲將卡片分成兩組，每一組 3 張。則應如何分組，這兩組的數字乘積才會相等？

解：因為 $33 = 3 \times 11$ ， $55 = 5 \times 11$ ， $119 = 7 \times 17$

$$85 = 5 \times 17, 91 = 7 \times 13, 39 = 3 \times 13$$

\Rightarrow 質因數 3、5、7、11、13、17 各有 2 個

\Rightarrow 每一組需質因數 3、5、7、11、13、17 各 1 個

$$\begin{aligned} \text{所以 } 33 \times 85 \times 91 &= 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \\ &= 55 \times 119 \times 39 \end{aligned}$$

\Rightarrow 應分成「33、85、91」和「55、119、39」兩組

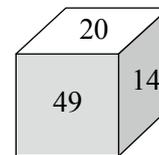
回家作業

一、選擇題：(每題 8 分，共 40 分)

- (D) 1. 下列敘述何者正確？
 (A) 所有的偶數皆為合數 (B) 所有的質數皆為奇數
 (C) 正整數不是質數就是合數 (D) 1 不是質數也不是合數
- (B) 2. 已知四位數 $6\square 89$ 為 9 的倍數，另一個四位數 $3\triangle 42$ 為 11 的倍數，則 $\square + \triangle = ?$
 (A) 8 (B) 9
 (C) 10 (D) 11
- (B) 3. 若四位數 $25\square\triangle$ 是 15 的倍數，則 $\square + \triangle$ 的最小值為何？
 (A) 1 (B) 2
 (C) 4 (D) 5
- (C) 4. 宇霖在計算紙上列出 1、2、3、5、6、10、12、20、……，則他可能在找下列哪一個數的因數？
 (A) 20 (B) 30
 (C) 60 (D) 72
- (A) 5. 設『 $a\theta b$ 』代表大於 a 且小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10\theta 15 = 2$ 。若 $30\theta c = 2$ ，則 c 可能為下列哪一個數？
 (A) 38 (B) 42
 (C) 46 (D) 50

二、填充題：(每格 8 分，共 40 分)

1. 曉霞對正整數甲利用短除法做因數分解的過程如右，則乙數的所有相異質因數之和 = 12。
2. 小歐將 30~50 的質數相加時，其中有一數漏掉了，得和為 156，則小歐漏掉的質數為 43。
3. 已知甲的標準分解式為 $2^{\square} \times 5 \times 7$ ，若 20 為甲的因數，但 112 不為甲的因數，則 \square 最大的值為 3。
4. 設 a 為正整數，且 $\frac{1}{a} + \frac{3}{a} + \frac{5}{a} + \frac{7}{a} + \frac{9}{a} + \frac{11}{a}$ 為整數，則 a 值共有 9 個。
5. 右圖是一個正方體，每個面上都寫了一個正整數，並且相對兩面所寫的數字和都相等。若 20、49、14 的對面所寫的數都是質數，依序為 a 、 b 、 c ，則 $a + b + c =$ 70。



三、計算題：(每小題 10 分，共 20 分)

1. 歐媽媽有三個已經在上學的孩子，若他的年齡與三個孩子年齡的乘積為 16555，則：
 (1) 歐媽媽的年齡為多少？
 (2) 最大的孩子與最小的孩子相差幾歲？

解：(1) 因為 $16555 = 5 \times 7 \times 11 \times 43$

所以歐媽媽 43 歲

(2) 因為最大的孩子 11 歲，最小的孩子 5 歲

所以相差 $11 - 5 = 6$ (歲)

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 16555} \\ \underline{7} \\ 7 \\ \underline{11} \\ 43 \\ \underline{43} \\ 0 \end{array}$$



重點整理

1. (1) 若某一個整數同時是幾個整數的因數時，我們稱這個數為這幾個整數的公因數。
 (2) 承(1)，在所有的公因數中最大的數，稱為這幾個數的最大公因數。
 (3) 當兩個整數的最大公因數為 1 時，稱這兩個整數互質。
2. (1) 若某一個整數同時是幾個整數的倍數時，我們稱這個數為這幾個整數的公倍數。
 (2) 承(1)，在所有的公倍數中最小的數，稱為這幾個數的最小公倍數。
3. (1) 利用短除法求最大公因數時，做到所有數沒有共同質因數，即可停止。
 (2) 利用短除法求最小公倍數時，做到任兩數沒有共同質因數，才可停止。
4. (1) 利用標準分解式求最大公因數時，從幾個數的標準分解式找每個共同質因數中次數最小者相乘。
 (2) 利用標準分解式求最小公倍數時，從幾個數的標準分解式找所有質因數中次數最高者相乘。
5. 若 a 、 b 都是正整數，則 $a \times b = (a, b) \times [a, b]$ 。

題型演練

老師說

1. 最大公因數與最小公倍數

學生做

求下列各組數的最大公因數與最小公倍數：

(1) $2^3 \times 3^2, 2^3 \times 3 \times 5, 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

(2) $2^2 \times 3^5 \times 7, 270$

(3) $21 \times 28 \times 49, 16 \times 27 \times 245$

解：(1) 最大公因數 = $2^3 \times 3$

最小公倍數 = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

(2) 因為 $270 = 2 \times 3^3 \times 5$

所以最大公因數 = 2×3^3

最小公倍數 = $2^2 \times 3^5 \times 5 \times 7$

(3) 因為 $21 \times 28 \times 49 = (3 \times 7) \times (2^2 \times 7) \times 7^2$

$= 2^2 \times 3 \times 7^4$

$16 \times 27 \times 245 = 2^4 \times 3^3 \times (5 \times 7^2)$

$= 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$

所以最大公因數 = $2^2 \times 3 \times 7^2$

最小公倍數 = $2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7^4$

求下列各組數的最大公因數與最小公倍數：

(1) $2^3 \times 5^2, 2^5 \times 7, 2^3 \times 5 \times 7$

(2) $616, 2^3 \times 5 \times 7$

(3) $25 \times 63 \times 80, 28 \times 35 \times 50$

解：(1) 最大公因數 = 2^3

最小公倍數 = $2^5 \times 5^2 \times 7$

(2) 因為 $616 = 2^3 \times 7 \times 11$

所以最大公因數 = $2^3 \times 7$

最小公倍數 = $2^3 \times 5 \times 7 \times 11$

(3) 因為 $25 \times 63 \times 80 = 5^2 \times (3^2 \times 7) \times (2^4 \times 5)$

$= 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$

$28 \times 35 \times 50 = (2^2 \times 7) \times (5 \times 7)$

$\times (2 \times 5^2)$

$= 2^3 \times 5^3 \times 7^2$

所以最大公因數 = $2^3 \times 5^3 \times 7$

最小公倍數 = $2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2$

有一保麗龍材質的實心長方體，長 210 公分，寬 168 公分，高 126 公分，若想把它切割成若干大小相同的正方體，而使其不剩下，則：

(1) 所切的正方體邊長最大為多少公分？

(2) 所切的正方體最少有幾塊？

$$\begin{array}{r|l} 2 & 210 \quad 168 \quad 126 \\ 3 & 105 \quad 84 \quad 63 \\ 7 & 35 \quad 28 \quad 21 \\ & 5 \quad 4 \quad 3 \end{array}$$

(1) 因為 $(210, 168, 126) = 2 \times 3 \times 7 = 42$

所以正方體的最大邊長為 42 公分

(2) 因為 $5 \times 4 \times 3 = 60$

所以最少可切出 60 塊正方體

碧潭樂園裡有一塊三角形公園，為了增加樹蔭處讓遊客休憩，想要沿著公園周圍種樹綠化環境，且相鄰兩棵樹之間的距離要相等，但在三角形的頂點處，只蓋涼亭不種樹，已知三角形公園邊長分別為 180 公尺、200 公尺、240 公尺，則：

(1) 兩棵樹之間的距離最大是多少公尺？

(2) 所種的樹最少有幾棵？

$$\begin{array}{r|l} 2 & 180 \quad 200 \quad 240 \\ 2 & 90 \quad 100 \quad 120 \\ 5 & 45 \quad 50 \quad 60 \\ & 9 \quad 10 \quad 12 \end{array}$$

(1) 因為 $(180, 200, 240) = 2 \times 2 \times 5 = 20$

所以兩棵樹之間的最大距離為 20 公尺

(2) 因為 $(9 + 10 + 12) - 3 = 28$

所以最少種 28 棵樹

天干：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；地支：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥，農曆記年是以天干地支來記年，分別以甲子、乙丑、丙寅、丁卯、戊辰、己巳、庚午、……來表示，已知西元 2012 年為壬辰年，則西元 2075 年的農曆記年為多少年？

解：因為天干有 10 個，地支有 12 個

⇒ 農曆記年以 $[10, 12] = 60$ (年) 為一個週期
又西元 2012 年為壬辰年

⇒ 西元 2072 年也是壬辰年

所以西元 2075 年為乙未年

歐太太有三個女兒，長女 7 日一歸，次女 11 日一歸，幼女 15 日一歸。某日三女同歸，歐太太為使三女下一次早些同歸相聚，便叫三女把歸家日期各縮短一天，但幼女說：不如把歸家日期各延長一天，便可早些相聚。則歐太太與幼女誰言之有理？

解：根據歐太太和幼女的說法，

得歐太太與三女相聚的週期如下：

歐太太： $[6, 10, 14] = 210$ (天)

幼女： $[8, 12, 16] = 48$ (天)

所以幼女言之有理

- (1) 若有一正整數，除 280 餘 8，除 490 餘 14，則此數為多少？
- (2) 在三位正整數中，被 28、42、70 除之皆餘 3 的最大數是多少？

解：(1) 因為 $280 - 8 = 272$ ， $490 - 14 = 476$

$$\begin{aligned} \text{又}(272, 476) &= 68 = 1 \times \textcircled{68} = 2 \times \textcircled{34} \\ &= 4 \times \textcircled{17} \end{aligned}$$

所以此數為 17、34、68

(2) 因為 $[28, 42, 70] = 420$

$$\text{又 } 420 \times 2 = 840 < 1000$$

$$420 \times 3 = 1260 > 1000$$

所以此三位數中的最大數
= $840 + 3 = 843$

- (1) 若有一正整數，除 206 餘 2，除 250 不足 5，則此數為多少？
- (2) 在三位正整數中，被 15 除餘 10，被 20 除餘 15，被 25 除不足 5 的最大數是多少？

解：(1) 因為 $206 - 2 = 204$ ， $250 + 5 = 255$

$$\begin{aligned} \text{又}(204, 255) &= 51 = 1 \times \textcircled{51} = 3 \times \textcircled{17} \\ \text{所以此數為 } &17、51 \end{aligned}$$

(2) 依題意得這個三位數被 15、20、25

除之皆不足 5

$$\text{因為}[15, 20, 25] = 300$$

$$\text{又 } 300 \times 3 = 900$$

$$300 \times 4 = 1200$$

所以此三位數中的最大數
= $900 - 5 = 895$

- (1) 若 a 、 b 都是正整數，請說明 $a \times b = (a, b) \times [a, b]$ 。
- (2) 甲、乙都是正整數，若甲 = 54，且 $(甲, 乙) = 6$ ， $[甲, 乙] = 270$ ，則乙 = ？

解：(1) 設 $g = (a, b)$ ， $l = [a, b]$

$$g \begin{array}{l} | \\ a \quad b \\ m \quad n \end{array}$$

$$\Rightarrow a = g \times m, b = g \times n$$

$$\text{且}(m, n) = 1$$

$$\text{所以 } a \times b = (g \times m) \times (g \times n)$$

$$= g \times (g \times m \times n)$$

$$= g \times l = (a, b) \times [a, b]$$

(2) 因為 $甲 \times 乙 = (甲, 乙) \times [甲, 乙]$

$$\Rightarrow 54 \times 乙 = 6 \times 270$$

$$\Rightarrow 乙 = 6 \times 5$$

所以乙 = 30

- (1) a 、 b 都是正整數，若 $b = 20$ ，且 $(a, b) = 4$ ， $[a, b] = 140$ ，則 $a = ?$
- (2) 若 24 和 90 與 30 和 k 有相同的最大公因數和最小公倍數，且 k 為正整數，則 $k = ?$

解：(1) 因為 $a \times b = (a, b) \times [a, b]$

$$\Rightarrow a \times 20 = 4 \times 140$$

$$\Rightarrow a = 4 \times 7$$

所以 $a = 28$

(2) 因為 $(24, 90) \times [24, 90] = 24 \times 90$

$$(30, k) \times [30, k] = 30 \times k$$

$$\text{又}(24, 90) = (30, k), [24, 90] = [30, k]$$

$$\text{所以 } 24 \times 90 = 30 \times k$$

$$\Rightarrow k = 72$$

回家作業

一、選擇題：(每題 8 分，共 40 分)

- (D) 1. 若「 $*$ 」是一新的運算符號，且 $a*b=(a, b)+[a, b]$ ，例如： $6*8=(6, 8)+[6, 8]=2+24=26$ ，則下列何者錯誤？
- (A) $9*6=21$ (B) $25*30=155$
 (C) $24*36=84$ (D) $14*21=35$
- (B) 2. 對正整數 a, b 而言，下列何者不正確？
- (A) 若 $(a, b)=1$ ，則 $[a, b]=a \times b$ (B) 若 $(a, b)=1$ ，則 a, b 都是質數
 (C) 若 $(a, b)=a$ ，則 $[a, b]=b$ (D) 若 a, b 都是質數，則 $[a, b]=a \times b$
- (B) 3. 甲、乙為兩正整數，若甲數 $=3 \times 5^2 \times 7^3$ ，且 $(\text{甲數}, \text{乙數})=35$ ，則乙數可為下列哪一個數？
- (A) 65 (B) 70
 (C) 105 (D) 175
- (C) 4. 已知甲數為乙數的 6 倍，且甲數和乙數的最小公倍數為 96，則甲數與乙數的最大公因數為多少？
- (A) 6 (B) 12
 (C) 16 (D) 24
- (A) 5. 已知 a 為正整數，且 $(a, 1176)=42$ ， $(140, a)=70$ ，則 a 的最小值為何？
- (A) 210 (B) 105
 (C) 70 (D) 42

二、填充題：(每格 8 分，共 40 分)

1. 若 $a=2^3 \times 3^2 \times 7^3$ ， $b=2^3 \times 3 \times 7^4$ ， $c=2^4 \times 3^3 \times 7^2$ ，則 $\frac{[a, b, c]}{(a, b, c)} = \underline{2 \times 3^2 \times 7^2}$ 。
2. 若 $a=([64, 72], 240)$ ， $b=([64, 72], 240)$ ，則 $a+b = \underline{288}$ 。
3. 臺中車站各種班車開出的時間有一定的間隔，右表為時刻表的一部分，則該車站「往臺南」和「往高雄」的車一起開出的第二班車時刻為 08:00。
4. 有一數介於 500 與 600 之間，若此數被 21 與 35 除均餘 8，則此數被 11 除時的餘數為 5。
5. 有一個三位數，其百位、十位、個位數字分別為 1、 a 、 b 。若此數與 72 的最大公因數為 12，則 $a+b = \underline{5 \text{ 或 } 11}$ 。

時刻 班次	目的地	
	往臺南	往高雄
1	06:00	06:20
2	06:20	06:45
3	06:40	07:10
4	07:00	07:35

三、計算題：(每小題 10 分，共 20 分)

1. 將 96 個梨子與 72 個蘋果混合裝成含有梨子和蘋果的禮盒。若每一盒內的梨子數相同，每一盒內的蘋果數也相同，且全部分完沒有剩餘，則：
- (1) 禮盒最多有多少盒？
 (2) 每一盒內水果最少有幾個？

解：(1) 因為 $(96, 72) = 2^3 \times 3 = 24$

所以禮盒最多有 24 盒

(2) 因為 $4+3=7$

所以每一盒內水果最少有 7 個

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 96 \ 72} \\
 \underline{2 \ 48 \ 36} \\
 2 \overline{) 24 \ 18} \\
 \underline{3 \ 12 \ 9} \\
 4 \ 3
 \end{array}$$



重點整理

- 當一個分數的分子和分母互質時，這個分數稱為最簡分數。
- 絕對值愈大的正分數，其值愈大；絕對值愈大的負分數，其值愈小。
- 任意幾個分數做加減時，
 - 若分母相同，則分母不變，分子直接相加或相減。
 - 若分母不同，則先通分化成相同分母後，分子再相加或相減。
- 幾個真分數或假分數相乘時，將分子相乘當作新分子，分母相乘當作新分母，所得到的新分數就是它們的乘積。
 - 除以一個不為 0 的分數，就等於乘以這個分數的倒數。
 - 同號的兩分數相乘(除)，其結果為正；異號的兩分數相乘(除)，其結果為負。
- 將一個不為 0 的真分數或假分數的分子和分母對調，所得到新的分數稱為原分數的倒數，我們也稱這兩個分數互為倒數。
 ※(1) 互為倒數的兩數相乘，其乘積為 1。 (2) 0 沒有倒數。

題型演練

老師說

比較下列各數的大小：

(1) $\frac{3}{16}$ 、 $\frac{4}{17}$ 、 $\frac{5}{18}$

(2) $-\frac{21}{20}$ 、 $-\frac{22}{21}$ 、 $-\frac{23}{22}$

解：(1) 因為 $[3, 4, 5] = 60$

$$\Rightarrow \frac{3}{16} = \frac{3 \times 20}{16 \times 20} = \frac{60}{320}$$

$$\frac{4}{17} = \frac{4 \times 15}{17 \times 15} = \frac{60}{255}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{5 \times 12}{18 \times 12} = \frac{60}{216}$$

$$\text{所以 } \frac{5}{18} > \frac{4}{17} > \frac{3}{16}$$

(2) 因為 $\frac{21}{20} = 1 + \frac{1}{20}$ ， $\frac{22}{21} = 1 + \frac{1}{21}$

$$\frac{23}{22} = 1 + \frac{1}{22}$$

$$\text{又 } \frac{1}{20} > \frac{1}{21} > \frac{1}{22} \Rightarrow \frac{21}{20} > \frac{22}{21} > \frac{23}{22}$$

$$\text{所以 } -\frac{21}{20} < -\frac{22}{21} < -\frac{23}{22}$$

1. 分數的比較大小

學生做

比較下列各數的大小：

(1) $\frac{2}{37}$ 、 $\frac{3}{41}$ 、 $\frac{4}{59}$

(2) $-\frac{95}{96}$ 、 $-\frac{96}{97}$ 、 $-\frac{97}{98}$

解：(1) 因為 $[2, 3, 4] = 12$

$$\Rightarrow \frac{2}{37} = \frac{2 \times 6}{37 \times 6} = \frac{12}{222}$$

$$\frac{3}{41} = \frac{3 \times 4}{41 \times 4} = \frac{12}{164}$$

$$\frac{4}{59} = \frac{4 \times 3}{59 \times 3} = \frac{12}{177}$$

$$\text{所以 } \frac{3}{41} > \frac{4}{59} > \frac{2}{37}$$

(2) 因為 $\frac{95}{96} = 1 - \frac{1}{96}$ ， $\frac{96}{97} = 1 - \frac{1}{97}$

$$\frac{97}{98} = 1 - \frac{1}{98}$$

$$\text{又 } \frac{1}{96} > \frac{1}{97} > \frac{1}{98} \Rightarrow \frac{95}{96} < \frac{96}{97} < \frac{97}{98}$$

$$\text{所以 } -\frac{95}{96} > -\frac{96}{97} > -\frac{97}{98}$$

計算下列各式的值：

$$(1) 2\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6} - 2\frac{7}{10}$$

$$(2) 2\frac{1}{5} - [(\frac{7}{2} - \frac{8}{3}) + (4\frac{6}{5} - 4\frac{2}{5})]$$

解：(1) 原式 = $(2 - 1 - 2) + (\frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{7}{10})$

$$= (-1) + (-\frac{47}{60})$$

$$= -1\frac{47}{60}$$

(2) 原式 = $2\frac{1}{5} - (\frac{5}{6} + \frac{4}{5})$

$$= 2\frac{1}{5} - \frac{49}{30}$$

$$= \frac{11}{5} - \frac{49}{30}$$

$$= \frac{66}{30} - \frac{49}{30} = \frac{17}{30}$$

計算下列各式的值：

$$(1) (-53\frac{1}{7}) - (-39\frac{3}{14}) + (-22\frac{2}{21})$$

$$(2) 7\frac{1}{5} - [(9\frac{2}{5} - 6\frac{1}{2}) + (4\frac{2}{3} - 8\frac{1}{5})]$$

解：(1) 原式 = $-53\frac{1}{7} + 39\frac{3}{14} - 22\frac{2}{21}$

$$= (-53 + 39 - 22)$$

$$+ (-\frac{1}{7} + \frac{3}{14} - \frac{2}{21})$$

$$= (-36) + (-\frac{1}{42})$$

$$= -36\frac{1}{42}$$

(2) 原式 = $7\frac{1}{5} - [2\frac{9}{10} + (-3\frac{8}{15})]$

$$= 7\frac{1}{5} - (-\frac{19}{30})$$

$$= 7\frac{6}{30} + \frac{19}{30} = 7\frac{25}{30} = 7\frac{5}{6}$$

計算下列各式的值：

$$(1) |\frac{1}{2} - 1| + |\frac{1}{3} - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{4} - \frac{1}{3}|$$

$$+ |\frac{1}{5} - \frac{1}{4}|$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \cdots + \frac{6}{16 \times 22}$$

解：(1) 原式 = $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$

$$+ (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

(2) 原式 = $(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{7})$

$$+ \cdots + (\frac{1}{16} - \frac{1}{22})$$

$$= 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$$

計算下列各式的值：

$$(1) |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}| + |\frac{1}{6} - \frac{1}{4}| + |\frac{1}{6} - \frac{1}{8}|$$

$$+ |\frac{1}{10} - \frac{1}{8}|$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{17 \times 19}$$

解：(1) 原式 = $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8})$

$$+ (\frac{1}{8} - \frac{1}{10})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(2) 原式 = $\frac{1}{2} (\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \cdots$

$$+ \frac{2}{17 \times 19})$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{17} - \frac{1}{19})$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{19}) = \frac{1}{2} \times \frac{18}{19} = \frac{9}{19}$$

計算下列各式的值：

$$(1) 2\frac{3}{5} \div (-5\frac{1}{5})$$

$$(2) (-\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{4}) \times (-\frac{4}{5}) \times \cdots \times (-\frac{98}{99}) \times (-\frac{99}{100})$$

$$\text{解：(1) 原式} = \frac{13}{5} \div (-\frac{26}{5})$$

$$= \frac{13}{5} \times (-\frac{5}{26})$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$(2) \text{原式} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}$$

$$= \frac{2}{100}$$

$$= \frac{1}{50}$$

計算下列各式的值：

$$(1) (-3\frac{2}{3}) \div (-1\frac{5}{6})$$

$$(2) (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{4}{3}) \times (-\frac{5}{4}) \times \cdots \times (-\frac{100}{99}) \times (-\frac{101}{100})$$

$$\text{解：(1) 原式} = (-\frac{11}{3}) \div (-\frac{11}{6})$$

$$= \frac{11}{3} \times \frac{6}{11}$$

$$= 2$$

$$(2) \text{原式} = -(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{100}{99} \times \frac{101}{100})$$

$$= -\frac{101}{2}$$

計算下列各式的值：

$$(1) (3 - \frac{1}{3}) \div \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{2}{7}$$

$$(2) (2 - \frac{1}{3}) \times 0.8 + \frac{5}{6} \div (\frac{2}{3} - \frac{1}{4})$$

$$\text{解：(1) 原式} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{1} \times \frac{3}{4} - \frac{2}{7}$$

$$= 6 - \frac{2}{7} = 5\frac{5}{7}$$

$$(2) \text{原式} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \div \frac{5}{12}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{12}{5}$$

$$= \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

計算下列各式的值：

$$(1) \frac{3}{8} \times 1\frac{1}{15} + \frac{9}{17} \div (-\frac{5}{17})$$

$$(2) 2.75 \div (3\frac{1}{12} - 1\frac{5}{6}) + 2.75 \times 1\frac{1}{3}$$

$$\text{解：(1) 原式} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{15} + \frac{9}{17} \times (-\frac{17}{5})$$

$$= \frac{2}{5} + (-\frac{9}{5}) = -\frac{7}{5}$$

$$(2) \text{原式} = \frac{11}{4} \div 1\frac{3}{12} + \frac{11}{4} \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{11}{4} \div \frac{15}{12} + \frac{11}{3}$$

$$= \frac{11}{4} \times \frac{12}{15} + \frac{11}{3}$$

$$= \frac{11}{5} + \frac{11}{3} = \frac{88}{15}$$

老師說

計算下列各式的值：

$$(1) 129\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} - 97\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} - (-58) \times \frac{2}{3}$$

$$(2) 69 \times (\frac{18}{161} + \frac{7}{115}) - 21 \times (\frac{4}{49} - \frac{3}{35})$$

$$\begin{aligned} \text{解：(1) 原式} &= [129\frac{3}{4} - 97\frac{3}{4} - (-58)] \times \frac{2}{3} \\ &= 90 \times \frac{2}{3} = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 原式} &= \frac{54}{7} + \frac{21}{5} - \frac{12}{7} + \frac{9}{5} \\ &= (\frac{54}{7} - \frac{12}{7}) + (\frac{21}{5} + \frac{9}{5}) \\ &= \frac{42}{7} + \frac{30}{5} = 6 + 6 = 12 \end{aligned}$$

6. 分配律

學生做

計算下列各式的值：

$$(1) (-1\frac{5}{13}) \times 6\frac{11}{18} - 1\frac{5}{13} \times 6\frac{7}{18}$$

$$(2) (-39) \times (\frac{3}{65} - \frac{4}{91}) - 57 \times [\frac{7}{95} - (-\frac{18}{133})]$$

$$\begin{aligned} \text{解：(1) 原式} &= (-1\frac{5}{13}) \times (6\frac{11}{18} + 6\frac{7}{18}) \\ &= (-\frac{18}{13}) \times 13 = -18 \end{aligned}$$

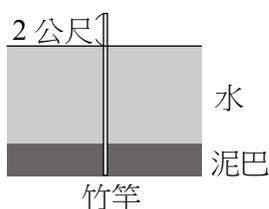
$$\begin{aligned} \text{(2) 原式} &= -\frac{9}{5} + \frac{12}{7} - \frac{21}{5} - \frac{54}{7} \\ &= (-\frac{9}{5} - \frac{21}{5}) + (\frac{12}{7} - \frac{54}{7}) \\ &= (-\frac{30}{5}) + (-\frac{42}{7}) = (-6) + (-6) \\ &= -12 \end{aligned}$$

老師說

7. 全部 = 部分 ÷ (部分所占的比例)

學生做

如右圖，一竹竿立於池塘中，竹竿全長的 $\frac{2}{7}$ 在泥中，剩下的 $\frac{3}{5}$ 在水中，露出水面的有 2 公尺，則此竹竿全長為多少公尺？



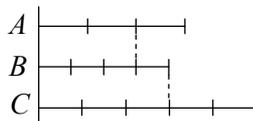
解：因為露出水面的部分占全長的

$$\begin{aligned} &1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{5} \times (1 - \frac{2}{7}) \\ &= 1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \\ &= 1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

所以竹竿全長為

$$2 \div \frac{2}{7} = 2 \times \frac{7}{2} = 7(\text{公尺})$$

英英有 A、B、C 三條不同長度的繩子，各分成若干等分，其長度關係如右圖所示，若 A 繩的長度為 54 公尺，則 C 繩的長度為多少公尺？



解：因為 B 繩長的 $\frac{3}{4}$ 為 $54 \times \frac{2}{3} = 36(\text{公尺})$

$$\Rightarrow B \text{ 繩長} = 36 \div \frac{3}{4} = 36 \times \frac{4}{3} = 48(\text{公尺})$$

又 C 繩長的 $\frac{3}{5}$ 為 48 公尺

$$\text{所以 C 繩長} = 48 \div \frac{3}{5} = 48 \times \frac{5}{3} = 80(\text{公尺})$$

回家作業

一、選擇題：(每題 8 分，共 40 分)

(D) 1. 計算 $(-4\frac{7}{19}) + (-9\frac{3}{17}) + 5\frac{7}{19} = ?$

(A) $-11\frac{3}{17}$ (B) $-10\frac{3}{17}$ (C) $-9\frac{3}{17}$ (D) $-8\frac{3}{17}$

(C) 2. 若 $\frac{12}{13} - (\frac{5}{17} - \frac{1}{13})$ 的值可化為最簡分數 $\frac{n}{m}$ ，則下列敘述何者正確？

(A) m 為合數 (B) n 為質數 (C) $m+n$ 為質數 (D) $m+n$ 為合數

(C) 3. 若甲數為負整數，且 $-\frac{5}{6} < \frac{\text{甲}}{24} < -\frac{5}{8}$ ，則滿足此條件的甲數有幾個？

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(D) 4. 櫻枝做一題「兩數相除」的計算題，不小心將「 \div 」號看成「 $+$ 」號，若沒有其他計算上的錯誤，算出的答案是 $-\frac{7}{8}$ ，已知原來的被除數是 $3\frac{1}{2}$ ，則原來兩數相除的正確答案為多少？

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{4}{3}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{5}$

(A) 5. 計算 $(\frac{1}{2}-1) \times (\frac{1}{3}-1) \times (\frac{1}{4}-1) \times \dots \times (\frac{1}{10}-1) = ?$

(A) $-\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $-\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

二、填充題：(每格 8 分，共 40 分)

1. 若 $\frac{-18}{24} = \frac{a}{20} = -\frac{6}{b} = \frac{c}{16}$ ，則 $a-b+c = \underline{-35}$ 。

2. 計算 $|-1 - (-\frac{5}{3})| - |-\frac{11}{6} - \frac{7}{6}| = \underline{-\frac{7}{3}}$ 。

3. 計算 $\frac{4}{21} \times 3\frac{1}{2} + 6 - 4\frac{2}{5} \div \frac{11}{15} = \underline{\frac{2}{3}}$ 。

4. 若 $a = -2\frac{5}{7}$ ， $b = -2\frac{2}{3}$ ， $c = -2\frac{9}{14}$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為 $\underline{a < b < c}$ 。

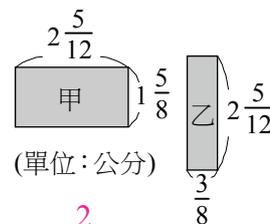
5. 已知 a 、 b 為正整數，且甲 $= \frac{b}{a}$ 、乙 $= \frac{b+1}{a}$ 、丙 $= \frac{b}{a+1}$ 、丁 $= \frac{b+1}{a+1}$ ，則甲、乙、丙、丁四數之中，最小者為 丙。

三、計算題：(每小題 10 分，共 20 分)

1. 甲、乙兩長方形的各邊長如右圖所示，則：

(1) 甲、乙兩長方形的周長和為多少公分？

(2) 甲、乙兩長方形的面積和為多少平方公分？



解：(1) 所求周長和 $= 2 \times (2\frac{5}{12} + 1\frac{5}{8} + 2\frac{5}{12} + \frac{3}{8}) = 2 \times (4\frac{5}{6} + 2) = 8\frac{5}{3} + 4 = 13\frac{2}{3}$ (公分)

(2) 所求面積和 $= 2\frac{5}{12} \times 1\frac{5}{8} + 2\frac{5}{12} \times \frac{3}{8} = 2\frac{5}{12} \times (1\frac{5}{8} + \frac{3}{8}) = 2\frac{5}{12} \times 2 = 4\frac{5}{6}$ (平方公分)



重點整理

1. 若 $\frac{b}{a}$ 為一個分數， n 是正整數，其中 $a \neq 0$ ，則 $(\frac{b}{a})^n = \frac{b^n}{a^n}$ 。
2. 對於任何一個正數 a 及正整數 n ，
 - (1) 當 $a < 1$ 時， $a^n < 1$ ，且 n 的值愈大， a^n 的值愈小。
 - (2) 當 $a > 1$ 時， $a^n > 1$ ，且 n 的值愈大， a^n 的值愈大。
3. 若 a 、 b 都是不為 0 的數，且 m 、 n 為正整數或 0，則：
 - (1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。
 - (2) $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 。
 - (3) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。
 - (4) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ 。

(※以上四式稱為指數律)

題型演練

老師說

計算下列各式的值：

$$(1) \frac{1}{-2} + \frac{2}{(-2)^2} - \frac{4}{(-2)^3} + \frac{8}{(-2)^4}$$

$$(2) \frac{1}{-4} + \frac{4}{(-4)^2} + \frac{16}{(-4)^3} + \frac{64}{(-4)^4}$$

解：(1) 原式 $= (-\frac{1}{2}) + \frac{2}{4} - (\frac{4}{-8}) + \frac{8}{16}$

$$= (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

(2) 原式 $= (-\frac{1}{4}) + \frac{4}{16} + (\frac{16}{-64}) + \frac{64}{256}$

$$= (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$$

$$= 0$$

1. 含乘方的分數運算

學生做

計算下列各式的值：

$$(1) \frac{1}{-3} - \frac{3}{(-3)^2} + \frac{9}{(-3)^3} - \frac{27}{(-3)^4}$$

$$(2) \frac{1}{-5} + \frac{5}{(-5)^2} - \frac{25}{(-5)^3} + \frac{125}{(-5)^4}$$

解：(1) 原式 $= (-\frac{1}{3}) - \frac{3}{9} + (\frac{9}{-27}) - \frac{27}{81}$

$$= (-\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{4}{3}$$

(2) 原式 $= (-\frac{1}{5}) + \frac{5}{25} - (\frac{25}{-125}) + \frac{125}{625}$

$$= (-\frac{1}{5}) + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5}$$

計算下列各式的值：

$$(1) \left(\frac{1}{15}\right)^3 \div \left[\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)^3 \times 1.2^3\right] - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$(2) (-4)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \div \left(-\frac{2}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

解：(1) 原式 = $\left(\frac{1}{15}\right)^3 \div \left[\left(\frac{1}{12}\right)^3 \times \left(\frac{12}{10}\right)^3\right] - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{15}\right)^3 \times 10^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3} - 1\right)$$

$$= -\frac{4}{27}$$

(2) 原式 = $16 \times \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{27}\right) \div \frac{4}{81} + \frac{1}{4}$

$$= 2 + \frac{1}{27} \times \frac{81}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 2 + 1 = 3$$

計算下列各式的值：

$$(1) 10 + 4.25^2 \times \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(1\frac{8}{9}\right)^2 \right]$$

$$(2) \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \div \left(-1\frac{3}{5}\right) + \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 \times 3\frac{1}{5}$$

解：(1) 原式 = $10 + \left(4\frac{1}{4}\right)^2 \times \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{17}{9}\right)^2 \right]$

$$= 10 + \left(\frac{17}{4}\right)^2 \times \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{9}{17}\right)^2 \right]$$

$$= 10 + \left(\frac{17}{4}\right)^2 \times \frac{2^4}{17^2}$$

$$= 10 + 1$$

$$= 11$$

(2) 原式 = $\frac{16}{25} \div \left(-\frac{8}{5}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{16}{5}$

$$= \frac{16}{25} \times \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{27}{8}\right) \times \frac{16}{5}$$

$$= \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{54}{5}\right)$$

$$= -\frac{56}{5}$$

(1) 若 $3^3 \times 27^5 \times 9^4 \div 81^3 = 3^a$ ，則 $a = ?$

(2) 若 $10^4 \times 100^{-5} \times 1000^4 = 2^b \times 5^c$ ，則 $b + c = ?$

解：(1) 因為 $3^3 \times 27^5 \times 9^4 \div 81^3$

$$= 3^3 \times (3^3)^5 \times (3^2)^4 \div (3^4)^3$$

$$= 3^3 \times 3^{15} \times 3^8 \div 3^{12}$$

$$= 3^{3+15+8-12} = 3^{14}$$

所以 $a = 14$

(2) 因為 $10^4 \times 100^{-5} \times 1000^4$

$$= 10^4 \times (10^2)^{-5} \times (10^3)^4$$

$$= 10^4 \times 10^{-10} \times 10^{12}$$

$$= 10^{4+(-10)+12}$$

$$= 10^6 = (2 \times 5)^6 = 2^6 \times 5^6$$

所以 $b = c = 6$

$$\Rightarrow b + c = 6 + 6 = 12$$

(1) 若 $9^2 \times 15^4 \times 125^2 = 3^a \times 5^b$ ，則 $a + b = ?$

(2) 若 $10^{-2} \times 100^4 \times 10^{-8} \div 1000^3 = 10^c$ ，則 $c = ?$

解：(1) 因為 $9^2 \times 15^4 \times 125^2$

$$= (3^2)^2 \times (3 \times 5)^4 \times (5^3)^2$$

$$= 3^4 \times 3^4 \times 5^4 \times 5^6$$

$$= 3^{4+4} \times 5^{4+6} = 3^8 \times 5^{10}$$

所以 $a = 8, b = 10$

$$\Rightarrow a + b = 8 + 10 = 18$$

(2) 因為 $10^{-2} \times 100^4 \times 10^{-8} \div 1000^3$

$$= 10^{-2} \times (10^2)^4 \times 10^{-8} \div (10^3)^3$$

$$= 10^{-2} \times 10^8 \times 10^{-8} \div 10^9$$

$$= 10^{-2+8+(-8)-9} = 10^{-11}$$

所以 $c = -11$

計算下列各式的值：

$$(1) \left(\frac{9}{2}\right)^{10} \times \left(-\frac{16}{9}\right)^5 \div (-6)^7$$

$$(2) \left(-\frac{1}{7}\right)^4 \div \left(\frac{1}{42}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{7}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{解：(1)原式} &= \frac{9^{10}}{2^{10}} \times \left(-\frac{2^4}{9}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^7 \\ &= \frac{9^{10}}{2^{10}} \times \left(-\frac{2^{20}}{9^5}\right) \times \left(-\frac{1}{2 \times 3}\right)^7 \\ &= -9^5 \times 2^{10} \times \left(-\frac{1}{2^7 \times 3^7}\right) \\ &= \frac{3^{10} \times 2^{10}}{2^7 \times 3^7} \\ &= 3^3 \times 2^3 = 6^3 \text{ (或 216)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)原式} &= \frac{1}{7^4} \div \left(\frac{1}{6 \times 7}\right)^2 \times \frac{5^3}{6^3} \div \frac{5^2}{7^2} \\ &= \frac{1}{7^4} \times 6^2 \times 7^2 \times \frac{5^3}{6^3} \times \frac{7^2}{5^2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

比較下列各組數的大小：

$$(1) 2^{23}, 4^{11}, 8^8$$

$$(2) 3^{44}, 5^{33}, 7^{22}$$

$$\text{解：(1) 因為 } 4^{11} = (2^2)^{11} = 2^{22}$$

$$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$$

$$\text{又 } 24 > 23 > 22$$

$$\text{所以 } 8^8 > 4^{11} > 2^{23}$$

$$(2) \text{ 因為 } 3^{44} = (3^4)^{11} = 81^{11}$$

$$5^{33} = (5^3)^{11} = 125^{11}$$

$$7^{22} = (7^2)^{11} = 49^{11}$$

$$\text{又 } 125 > 81 > 49$$

$$\text{所以 } 5^{33} > 3^{44} > 7^{22}$$

計算下列各式的值：

$$(1) \left(\frac{25}{16}\right)^6 \times \left(-\frac{8}{5}\right)^9 \div 10^3$$

$$(2) \left(\frac{1}{11}\right)^5 \div \left(-\frac{1}{22}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \div \left(\frac{3}{11}\right)^3$$

$$\begin{aligned} \text{解：(1)原式} &= \left(\frac{5^2}{2^4}\right)^6 \times \left(-\frac{2^3}{5}\right)^9 \div (2 \times 5)^3 \\ &= \frac{5^{12}}{2^{24}} \times \left(-\frac{2^{27}}{5^9}\right) \times \left(\frac{1}{2 \times 5}\right)^3 \\ &= -5^3 \times 2^3 \times \frac{1}{2^3 \times 5^3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)原式} &= \frac{1}{11^5} \times 22^2 \times \left(-\frac{3^3}{2}\right) \times \left(\frac{11}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{11^5} \times 2^2 \times 11^2 \times \left(-\frac{3^3}{2}\right) \times \frac{11^3}{3^3} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

比較下列各組數的大小：

$$(1) 3^{20}, 9^{13}, 27^6$$

$$(2) 2^{65}, 3^{39}, 5^{26}$$

$$\text{解：(1) 因為 } 9^{13} = (3^2)^{13} = 3^{26}$$

$$27^6 = (3^3)^6 = 3^{18}$$

$$\text{又 } 26 > 20 > 18$$

$$\text{所以 } 9^{13} > 3^{20} > 27^6$$

$$(2) \text{ 因為 } 2^{65} = (2^5)^{13} = 32^{13}$$

$$3^{39} = (3^3)^{13} = 27^{13}$$

$$5^{26} = (5^2)^{13} = 25^{13}$$

$$\text{又 } 32 > 27 > 25$$

$$\text{所以 } 2^{65} > 3^{39} > 5^{26}$$

回家作業

一、選擇題：(每題 8 分，共 40 分)

- (B) 1. 若 $\frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 5} + \frac{-7}{2 \times 3^3 \times 5^2} = \frac{\square}{2^3 \times 3^3 \times 5^2}$ ，則 $\square = ?$
 (A) -11 (B) -13 (C) -15 (D) -17
- (C) 2. 設 $a = -\frac{1}{2}$ ，則 a^0 、 a^1 、 a^2 、 a^3 的大小關係為何？
 (A) $a^3 > a^2 > a^1 > a^0$ (B) $a^2 > a^0 > a^1 > a^3$ (C) $a^0 > a^2 > a^3 > a^1$ (D) $a^0 > a^2 > a^1 > a^3$
- (C) 3. 計算 $[(-\frac{9}{5})^3]^3 \div [(-\frac{9}{5})^2]^4$ 之值為何？
 (A) $\frac{9}{5}$ (B) -1 (C) $-\frac{9}{5}$ (D) 1
- (D) 4. 下列何者的值與其他三者不同？
 (A) $(-\frac{2}{5})^3$ (B) $\frac{8}{(-5)^3}$
 (C) $(\frac{2}{5})^6 \div (-\frac{2}{5})^3$ (D) $(-\frac{2}{5}) + (-\frac{2}{5}) + (-\frac{2}{5})$
- (B) 5. 若甲 $= (-\frac{5}{11})^{13}$ ，乙 $= (-\frac{3}{11})^{13}$ ，丙 $= (-\frac{1}{11})^{13}$ ，則甲、乙、丙的大小關係為何？
 (A) 甲 $>$ 乙 $>$ 丙 (B) 丙 $>$ 乙 $>$ 甲 (C) 甲 $>$ 丙 $>$ 乙 (D) 丙 $>$ 甲 $>$ 乙

二、填充題：(每格 8 分，共 40 分)

1. 計算 $[(-4.9) \div (-1\frac{2}{5})^2 + (-\frac{3}{2})^2 \times (-2\frac{2}{3})] \div (-1.25)$ ，得其結果為 $\frac{n}{m}$ ，若 $\frac{n}{m}$ 為最簡分數，則 $n - m =$ 29。
2. 設 $a = (\frac{-4}{3})^2$ ， $b = (\frac{-4}{3})^3$ ， $c = (\frac{-4}{3})^4$ ， $d = (\frac{-4}{3})^5$ ，則 a 、 b 、 c 、 d 的大小關係為 $c > a > b > d$ 。
3. 計算 $(4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3) \times (-25)^4 =$ 100000000。
4. 計算 $\frac{87^4}{29^4} =$ 81。
5. 計算 $(-2\frac{1}{4}) \div (-3)^2 - 2^4 \div (-\frac{4}{5})^3 \times (-0.12) =$ -4。

三、計算題：(每小題 10 分，共 20 分)

1. 已知某種細菌每經 2 分鐘後，數量就會增加為原來的 3 倍，且假設細菌不會死，今有該種細菌 8 個，則：

- (1) 10 分鐘後的細菌數是多少個？
 (2) 42 分鐘後的細菌數是 34 分鐘後細菌數的幾倍？

解：(1) 因為 $10 \div 2 = 5$

所以 10 分鐘後的細菌數有 $8 \times 3^5 = 1944$ (個)

- (2) 因為 $42 \div 2 = 21$ ， $34 \div 2 = 17$

所以 $\begin{cases} 42 \text{ 分鐘後的細菌數有 } 8 \times 3^{21} \text{ 個} \\ 34 \text{ 分鐘後的細菌數有 } 8 \times 3^{17} \text{ 個} \end{cases}$

所求 $= \frac{8 \times 3^{21}}{8 \times 3^{17}} = 3^4 = 81$ (倍)