

第 1 章 比例線段與相似形

1-1 連 比

實力養成 重點 1 連比與連比例式

1. 設 a 、 b 、 c 都是不為 0 的數， $a:b:c$ 這樣的比稱為連比。
2. 若 $x:y=a:b$ ， $y:z=b:c$ ， $x:z=a:c$ ，可以表示成 $x:y:z=a:b:c$ ，稱為連比例式。
3. 若 a 、 b 、 c 都是不為 0 的整數，且 a 、 b 、 c 三數的最大公因數是 1，則 $a:b:c$ 稱為最簡整數比。
4. 設 a 、 b 、 c 都是不為 0 的數，若 $x:y:z=a:b:c$ ，則：
 - (1) $x:y:z=ka:kb:kc$ ， $k \neq 0$ 。
 - (2) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 。
 - (3) $x=ar$ ， $y=br$ ， $z=cr$ ， $r \neq 0$ 。

題型 1 求連比例式中的值

1. 若 $3:x:4=1:2:y$ ，則 $x=\underline{6}$ ，
 $y=\underline{\frac{4}{3}}$ 。
2. 若 $6:9:x=y:3:8$ ，則 $x=\underline{24}$ ，
 $y=\underline{2}$ 。

題型 3 由關係式求比值

設 a 、 b 、 c 均不為 0，且 $\frac{a}{2}=\frac{b}{6}=\frac{c}{7}$ ，則
 $(3a+2b):(2b+3c)$ 的比值是 $\underline{\frac{6}{11}}$ 。

題型 5 由兩組比求相關連比 I

求下列各數的連比：

- (1) 若 $5a:4c=10:8$ ， $3b:7c=9:14$ ，
則 $a:b:c=\underline{2:3:2}$ 。
- (2) 若 $a:3b=2:3$ ， $3a:c=12:5$ ，
則 $a:b:c=\underline{4:2:5}$ 。

題型 2 連比例式性質的運用

1. 若 $x:y:z=5:3:2$ ，且 $x+y+z=100$ ，
則 $x=\underline{50}$ ， $y=\underline{30}$ ， $z=\underline{20}$ 。
2. 已知 $2a:3b:4c=3:4:5$ ，則：
 - (1) $a:b:c=\underline{18:16:15}$ 。
 - (2) $(a+b-c):c=\underline{19:15}$ 。

題型 4 由連比求其他相關連比

若 $(a+b):(b+c):(c+a)=3:4:5$ ，則
 $a:b:c=\underline{2:1:3}$ 。

題型 6 由兩組比求相關連比 II

1. 若 $\frac{x}{7}=\frac{z}{6}$ ， $y:z=8:15$ ，則 $x:y:z$
 $=\underline{35:16:30}$ 。
2. 若 $2x=3y=4z$ ，且 x 、 y 、 z 三數皆不為 0，則 $x:y:z=\underline{6:4:3}$ 。

題型 7 連比例的圖形問題

- 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 a 、 b 、 c ，
若 $a:b=3:5$ ，且 $b:c=3:4$ ，則
 $a:b:c=\underline{9:15:20}$ 。
- 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ ，
 $5\overline{AB}=4\overline{BC}$ ，且 $\triangle ABC$ 的周長為60，
則 $\overline{AB}=\underline{16}$ ， $\overline{BC}=\underline{20}$ ，
 $\overline{AC}=\underline{24}$ 。

強化練習

- 求下列各比例式中 x 與 y 的值：
 - 若 $5:x:4=6:2:y$ ，則 $x=\underline{\frac{5}{3}}$ ， $y=\underline{\frac{24}{5}}$ 。
 - 若 $x:5:4=3:4:y$ ，則 $x=\underline{\frac{15}{4}}$ ， $y=\underline{\frac{16}{5}}$ 。
- 求下列各數的連比：
 - 若 $8a:5b=4:3$ ， $2b:9c=1:3$ ，則 $a:b:c=\underline{5:6:4}$ 。
 - 若 $3a:c=12:5$ ， $b:3c=7:15$ ，則 $a:b:c=\underline{4:7:5}$ 。
 - 若 $xyz \neq 0$ ， $7y=2z$ ， $\frac{x}{4}=\frac{z}{3}$ ，則 $x:y:z=\underline{28:6:21}$ 。
- 若小明、小英與阿花分別為 x 歲、 y 歲與 z 歲，且已知 $x:y=3:5$ ， $y:z=4:7$ ，
則 $x:y:z=\underline{12:20:35}$ 。
- 若 $x:y:z=3:3:2$ ，且 $x+y+z=120$ ，則 $x=\underline{45}$ ， $y=\underline{45}$ ， $z=\underline{30}$ 。
- 若 $\frac{a}{7}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3} \neq 0$ ，則 $(2a+3b-c):c$ 的比值是 $\underline{\frac{26}{3}}$ 。
- 設 x 、 y 、 z 三數皆不為0，且 $3x=4y=5z$ ，則 $x:y:z=\underline{20:15:12}$ 。
- 已知 $3a:2b:c=1:2:3$ ，求下列各比的比值：
 - $(a+2b+c):c$ 的比值是 $\underline{\frac{16}{9}}$ 。
 - $(a+2b):(b+3c)$ 的比值是 $\underline{\frac{7}{30}}$ 。
- 甲、乙、丙三人投資做生意。已知甲、乙、丙三人出資的比例為 $2:3:4$ ，公司的總資本為18,000,000元，那麼甲出資 $\underline{4,000,000}$ 元，乙出資 $\underline{6,000,000}$ 元，丙出資 $\underline{8,000,000}$ 元。
- 設 $(a+b):(b+c):(c+a)=5:7:8$ ，且 $abc \neq 0$ ，則 $a:b:c=\underline{3:2:5}$ 。
- 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A:\angle B:\angle C=3:1:2$ ，則 $\angle A=\underline{90}$ 度， $\angle C=\underline{60}$ 度。
- 在 $\triangle ABC$ 中，若 $8\overline{AB}=5\overline{BC}$ ， $3\overline{AB}=2\overline{AC}$ ，且 $\triangle ABC$ 的周長為82，則 $\overline{AB}=\underline{20}$ ，
 $\overline{AC}=\underline{30}$ 。

題型 8 連比的應用問題

已知大漢游泳池內分為溫水區、冷水區以及兒童區三種游泳池。若這三區的水量比為 $3:5:2$ ，而且此三區的水量總共有1800公秉，那麼溫水區的水量有 $\underline{540}$ 公秉，冷水區的水量有 $\underline{900}$ 公秉，兒童區的水量有 $\underline{360}$ 公秉。

一、選擇題：每題 5 分，共 25 分

- (B) 1. 已知 $a:b=3:2$ ， $a:c=3:11$ ，則 $a:b:c=?$
 (A) $3:22:11$ (B) $3:2:11$
 (C) $9:33:22$ (D) $11:2:3$
- (D) 2. 設 $x:y:18=3:2:6$ ，則 $x+y=?$
 (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 15
- (D) 3. 設 $a、b、c$ 均不為 0，且 $3a=5b=2c$ ，則 $a:b:c=?$
 (A) $3:5:2$ (B) $6:10:8$
 (C) $10:6:21$ (D) $10:6:15$
- (C) 4. 設 $2x:3y:4z=3:4:6$ ，則 $x:y:z=?$
 (A) $3:4:3$ (B) $6:10:15$
 (C) $9:8:9$ (D) $2:6:9$
- (D) 5. 已知 $5:x:y=3:8:7$ ，則 $x+y=?$
 (A) 8 (B) 9 (C) 21 (D) 25

二、填充題：每格 5 分，共 65 分

1. 求下列各連比：(化為最簡整數比)

(1) $a:b=5:4$ ， $b:c=2:3$ ，則 $a:b:c=\underline{5:4:6}$ 。

(2) $a:b=7:2$ ， $a:c=3:1$ ，則 $a:b:c=\underline{21:6:7}$ 。

2. 已知 $x:y:z=5:2:7$ ，則：

(1) $(x+y):3z$ 的比值 = $\underline{\frac{1}{3}}$ 。

(2) $(x+3z):2y$ 的比值 = $\underline{\frac{13}{2}}$ 。

(3) $(x+2y+z):(3x-y+2z)$ 的比值 = $\underline{\frac{16}{27}}$ 。

3. 已知 $a、b、c$ 皆不為 0，且 $2a=3b$ ， $3a=4c$ ，試問：

(1) $a:b:c=\underline{12:8:9}$ 。

(2) 若 $b+c=51$ ，則 $a=\underline{36}$ 。

4. 已知 $a:b:c=3:4:6$ ，且 $ax=by=cz$ ， $xyz \neq 0$ ，則 $x:y:z=\underline{4:3:2}$ 。

5. 設 $x:17:11=12:51:y$ ，則 $\frac{y}{x}=\underline{\frac{33}{4}}$ 。

6. 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ ，且 $x+y+z=39$ ，則 $y=$ 15。

7. 設 $x:y=5:7$ ，且 $(x+z):z=5:2$ ，則 $x:y:z=$ 15:21:10。

8. 已知三角形 ABC 中，三個內角的度數比為 $3:2:1$ ，則此三角形為 直角 三角形。
(填銳角、鈍角或直角)

9. 有三個正整數 a 、 b 、 c 。已知 $a:b:c=6:10:15$ ，且 $[a,b,c]=90$ ，則 $a+b+c=$ 93。

三、計算題：每題 5 分，共 10 分

1. 已知一三角形的三邊長比為 $4:3:5$ 。若此三角形的周長為 84 公分，則三邊長分別為多少公分？

解：設三邊長為 $4k$ 公分、 $3k$ 公分、 $5k$ 公分， $k \neq 0$ ，

$$4k+3k+5k=84, 12k=84, k=7,$$

三邊長分別為 28 公分、21 公分、35 公分。

答：28 公分、21 公分、35 公分

2. 已知大寶、二寶、小寶三人共有 940 元，且大寶錢的 3 倍是二寶錢的 4 倍；二寶錢的 4 倍是小寶錢的 5 倍，則大寶、二寶、小寶三人各有多少元？

解：設大寶有 a 元，二寶有 b 元，小寶有 c 元，

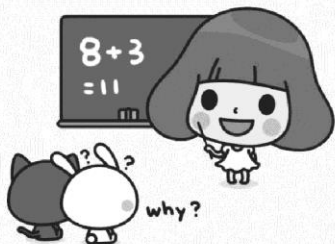
$$\text{則 } 3a=4b, 4b=5c, a:b:c=20:15:12。$$

$$\text{設 } a=20k, b=15k, c=12k, k \neq 0,$$

$$\text{則 } 20k+15k+12k=940, 47k=940, k=20,$$

故大寶有 400 元，二寶有 300 元，小寶有 240 元。

答：大寶 400 元，二寶 300 元，小寶 240 元



每週一題



過年期間，小文和阿茂到年貨大街採買，在某個攤位上看見有販賣 A 、 B 、 C 三種糖果，商家以每 100 公克為單位來販售，且 A 、 B 、 C 的單價比為 $6:5:3$ 。若小文買了 A 、 B 、 C 三種糖果，且所買的重量比為 $1:3:2$ 。試問：

- (1) 小文購買 A 、 B 、 C 所花的費用比為何？
- (2) 若 A 、 B 、 C 三種糖果每 100 公克實際的單價分別為 30 元、25 元、15 元，且阿茂也在同一家店用 250 元買了 A 、 B 、 C 共 1000 公克的糖果，則阿茂所買糖果的重量比為何？

解

- (1) 設 A 、 B 、 C 三種糖果的價格分別為 $6r$ 元、 $5r$ 元、 $3r$ 元， $r \neq 0$ ，小文購買 A 、 B 、 C 三種糖果的重量分別為 m 公克、 $3m$ 公克、 $2m$ 公克， $m \neq 0$ ，則小文購買 A 、 B 、 C 所花的費用比為 $6r \times m : 5r \times 3m : 3r \times 2m = 2:5:2$ 。

- (2) 設阿茂購買 A 、 B 、 C 三種糖果的重量分別為 $100x$ 公克、 $100y$ 公克、 $100z$ 公克，由題意可知

$$\begin{cases} 100x + 100y + 100z = 1000 \cdots \cdots ① \\ 30x + 25y + 15z = 250 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①化簡後得 $x + y + z = 10 \cdots \cdots ③$

②化簡後得 $6x + 5y + 3z = 50 \cdots \cdots ④$

④ $-$ ③ $\times 3$ ，得 $3x + 2y = 20$ ，

符合上式的解有 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \\ z=1 \end{cases}$ ，

則阿茂所買糖果的重量比 $100x : 100y : 100z = x : y : z$ 為 $6:1:3$ 、 $2:2:1$ 或 $2:7:1$ 。

1-2 ➡ 比例線段

實力養成

重點

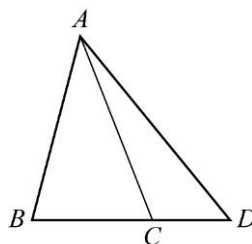
1

三角形面積與邊長的關係

▲ 兩個等高三角形的面積比等於其底邊長的比：

如右圖，已知 C 在 $\overline{BD}$ 上，則

$\triangle ABC$ 面積： $\triangle ACD$ 面積 = $\overline{BC}$ ： $\overline{CD}$ 。



題型 1

等高三三角形的面積比

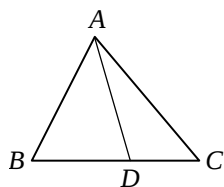
如右圖， D 在 $\overline{BC}$ 上。

已知 $\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$ ，

且 $\triangle ABC$ 面積為 10 平方公分，則 $\triangle ABD$ 面積為

6 平方公分， $\triangle ADC$

面積為 4 平方公分。



題型 2

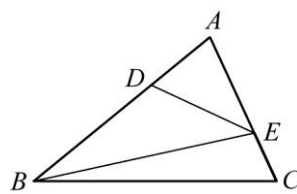
等高三三角形面積比的應用

如右圖， $\triangle ABC$ 中，

已知 $\overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{DB}$ ，

且 $\overline{AE} = 2 \overline{EC}$ ，則

$\frac{\triangle BDE \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{4}{9}$ 。

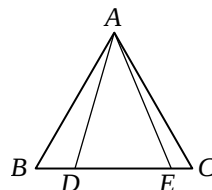


強化練習

1. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\triangle ABC$ 面積為 140 cm^2 。

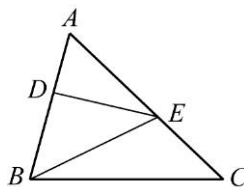
(1) 若 $\overline{BC} = 4 \overline{BD}$ ，則 $\triangle ABD$ 面積為 35 cm^2 。

(2) 若 $\overline{BC} = 7 \overline{CE}$ ，則 $\triangle AEC$ 面積為 20 cm^2 。



2. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{DB}$ ， $\overline{AE} = \frac{4}{3} \overline{EC}$ ，

則 $\frac{\triangle BDE \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{12}{35}$ 。



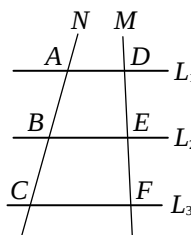
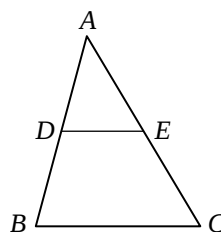
1. 平行線截三角形的兩邊成比例線段：

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上。

若 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則：

- (1) $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 。
- (2) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ 。
- (3) $\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$ 。
- (4) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 。

2. 如右圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ， N 、 M 是它們的截線，交點為 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F ，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



題型 1

平行線截比例線段 I

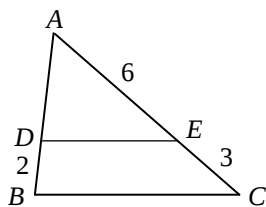
如右圖， $\triangle ABC$ 中，

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。已知

$\overline{AE} = 6$ ， $\overline{EC} = 3$ ，

$\overline{DB} = 2$ ，則

$\overline{AD} =$ 4。



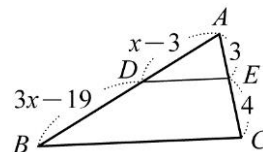
題型 2

平行線截比例線段 II

如右圖， $\triangle ABC$ 中，

已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

則 $x =$ 9。



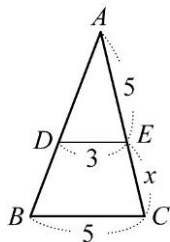
題型 3

平行線截比例線段 III

如右圖， $\triangle ABC$ 中，

已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

則 $x =$ $\frac{10}{3}$ 。



題型 4

三條平行線截比例線段 I

如右圖，已知

$\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$ ，

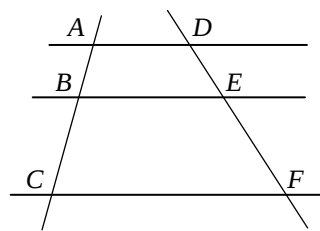
$\overline{AB} = 7$ cm，

$\overline{AC} = 21$ cm，

$\overline{DE} = (3x+2)$ cm，

$\overline{EF} = (7x+2)$ cm，

則 $x =$ 2。



題型 5 三條平行線截比例線段 II

如右圖，

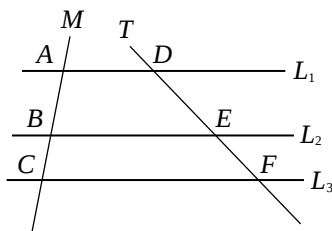
$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，其中

M 、 T 是截線。若

$\overline{AB} = 9$ ， $\overline{EF} = 8$ ，

且 $\overline{DE} = 2\overline{BC}$ ，

則 $\overline{DE} = \underline{12}$ 。



題型 6 三條平行線截比例線段 III

如右圖，已知

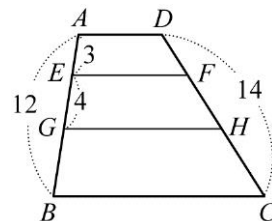
$\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel$

$\overline{BC}$ 。若 $\overline{AB} = 12$ ，

$\overline{AE} = 3$ ， $\overline{EG} = 4$ ，

$\overline{CD} = 14$ ，則

$\overline{DF} = \underline{\frac{7}{2}}$ ， $\overline{CH} = \underline{\frac{35}{6}}$ 。



題型 7 平行線截比例線段的應用 I

如右圖，已知 $\overline{FG} \parallel$

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AF} = 2$ ，

$\overline{FD} = 3$ ， $\overline{DB} = 4$ 。

(1) 若 $\overline{AC} = 12$ ，

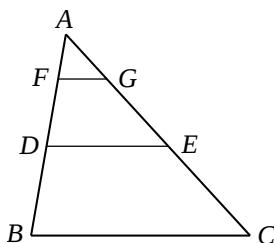
則 $\overline{AG} + \overline{EC}$

$= \underline{8}$ ，

$\overline{GE} = \underline{4}$ 。

(2) 若 $\overline{BC} = 9$ ，則 $\overline{FG} = \underline{2}$ ，

$\overline{DE} = \underline{5}$ 。



題型 8 平行線截比例線段的應用 II

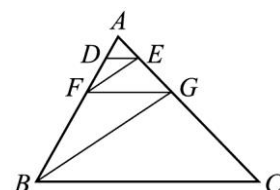
如右圖， $\overline{DE} \parallel \overline{FG} \parallel$

$\overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{BG}$ 。

若 $\overline{AD} : \overline{DF} = 3 : 5$ ，

則 $\overline{AE} : \overline{AC} =$

$\underline{9 : 64}$ 。



題型 9 平行線截比例線段的應用 III

如右圖， $\triangle ABC$ 中，

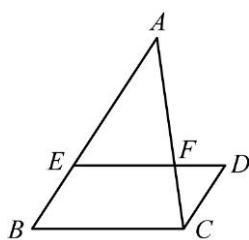
$\overline{AE} = 2\overline{BE}$ ， $\overline{BC} = 9$ 。

已知四邊形 $BCDE$

為平行四邊形，

$\overline{DE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F 點，

則 $\overline{DF} = \underline{3}$ 。



題型 10 三條平行線截比例線段的應用

如右圖，四邊形

$ABCD$ 是梯形，

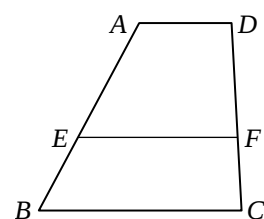
$\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，

$\overline{AE} : \overline{EB} = 3 : 2$ 。

若 $\overline{AD} = 4$ 公分，

$\overline{BC} = 9$ 公分，則

$\overline{EF} = \underline{7}$ 公分。

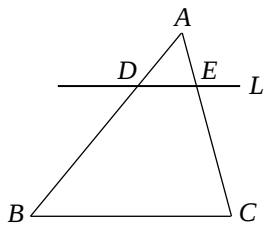


強化練習

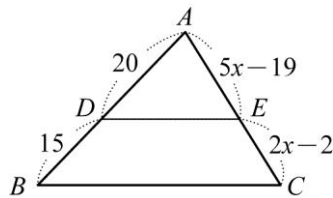
1. 如下圖(一), $L \parallel BC$ 。若 $\overline{AE} = \frac{8}{5}$, $\overline{EC} = 4$, $\overline{DB} = 5$, 則 $\overline{AD} =$ 2。

2. 如下圖(二), $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, 則 $\overline{AE} - \overline{EC} =$ 4。

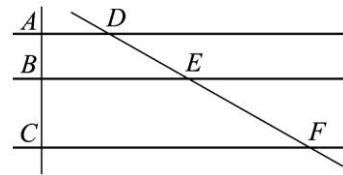
3. 如下圖(三), $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$ 。若 $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{DE} = x+3$, $\overline{EF} = x+5$, 則 $x =$ 1。



圖(一)



圖(二)

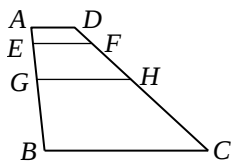


圖(三)

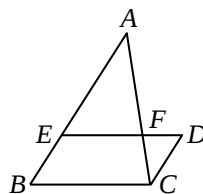
4. 如下圖(四), 若 $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AE} = 2$, $\overline{EG} = 4$, $\overline{DC} = 24$, $\overline{HC} = 14$, 則 $\overline{BG} =$ 8.4。

5. 如下圖(五), $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 3\overline{BE}$, $\overline{BC} = 15$ 。已知四邊形 $BCDE$ 為平行四邊形, $\overline{DE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F 點, 則 $\overline{DF} =$ 5。

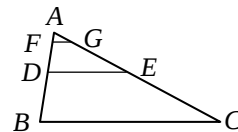
6. 如下圖(六), 已知 $\overline{FG} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AF} = 1$, $\overline{FD} = 3$, $\overline{DB} = 5$, $\overline{BC} = 18$, 則 $\overline{FG} =$ 2, $\overline{DE} =$ 8。



圖(四)



圖(五)

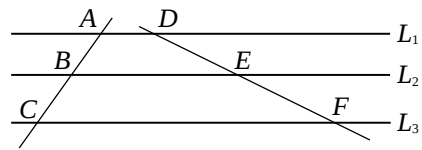


圖(六)

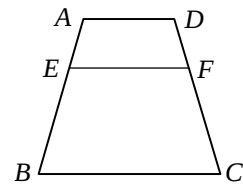
7. $\triangle ABC$ 中，已知 D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。若 $\overline{AD} = 3x - 3$ ， $\overline{BD} = 3x + 1$ ， $\overline{DE} : \overline{BC} = 3 : 7$ ，則 $x =$ 5。

8. $\triangle ABC$ 中，已知 D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。若 $\overline{AD} = x - 3$ ， $\overline{BD} = x - 1$ ， $\overline{BC} = x - 2$ ， $\overline{DE} = 3$ ，則 $\overline{AB} =$ 14。

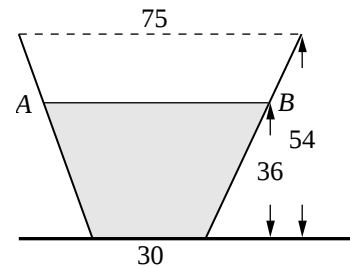
9. 如右圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ 。若 $\overline{AB} = \sqrt{7} - 1$ ， $\overline{EF} = \sqrt{7} + 1$ ，且 $\overline{DE} = \overline{BC} + 1$ ，則 $\overline{DE} =$ 3。



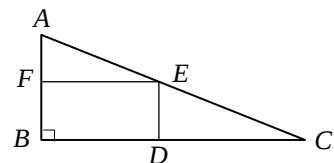
10. 如右圖， $ABCD$ 為梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 。若 $\overline{AD} = 10$ ， $\overline{BC} = 20$ ， $\overline{AE} : \overline{EB} = 1 : 2$ ，則 $\overline{EF} =$ $\frac{40}{3}$ 。



11. 右圖為一梯形水桶的剖面圖，下底寬 30 公分，上底開口寬 75 公分，桶高 54 公分。若桶內盛水高 36 公分，則水面寬 $\overline{AB}$ 為 60 公分。



12. 如右圖，四邊形 $BDEF$ 為矩形， $\overline{BD} : \overline{DE} = 2 : 1$ ，且 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{BF} =$ $\frac{30}{11}$ 。



1. 三角形中，平行線的判別：

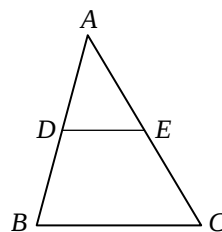
如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上。

如果下面三個比例式有一個成立，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

(1) $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 。

(2) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ 。

(3) $\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$ 。



2. 三角形兩邊中點連線平行於第三邊，且此線段長為第三邊長度的一半。

題型 1

由比例線段判別平行線

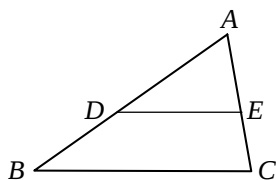
如右圖， $\triangle ABC$ 中，

已知 $\overline{AD} : \overline{AB} =$

$\overline{AE} : \overline{AC}$ ， $\angle A =$

65° ， $\angle C = 80^\circ$ ，

則 $\angle ADE =$ 35 度。



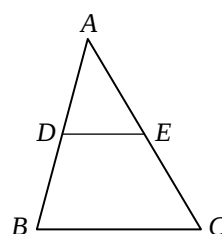
題型 2

三角形兩邊中點連線性質

如右圖， $\triangle ABC$ 中，

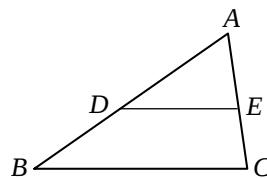
D 、 E 兩點分別是 $\overline{AB}$

及 $\overline{AC}$ 的中點。若 $\overline{BC} = 6$ ，則 $\overline{DE} =$ 3。

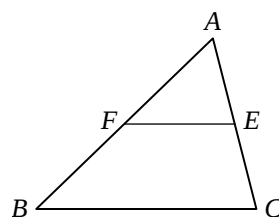


強化練習

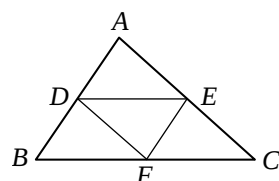
1. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ ， $\angle B = 35^\circ$ ， $\angle A = 63^\circ$ ，則 $\angle AED =$ 82 度。



2. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， F 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AF} = \overline{BF}$ ， $\overline{AE} = \overline{EC}$ 。若 $\overline{EF} = 5$ ，則 $\overline{BC} =$ 10。



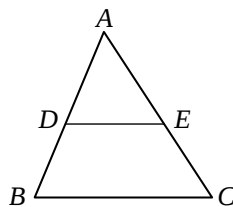
3. 如右圖，有一三角形的荷花池 ABC ，取三邊中點 D 、 E 、 F ，建三座橋 $\overline{DE}$ 、 $\overline{DF}$ 、 $\overline{EF}$ 。已知橋的長度 $\overline{DE} = 6$ 公尺， $\overline{DF} = 5$ 公尺， $\overline{EF} = 4$ 公尺，那麼此三角形荷花池的周長為 30 公尺。



一、選擇題：每題 5 分，共 25 分

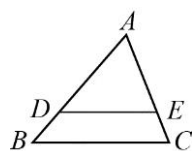
- (C) 1. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，若 D 點在 $\overline{AB}$ 上， E 點在 $\overline{AC}$ 上，則在下列哪一個條件下，不一定使得 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ？

(A) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ (B) $\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AE} : \overline{EC}$
(C) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ (D) $\overline{BD} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{AC}$



- (A) 2. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AD} = 8$ 公分， $\overline{AE} = 2\overline{BD}$ ， $\overline{CE} = 2.5$ 公分，則 $\overline{BD}$ 為多少公分？

(A) $\sqrt{10}$ (B) 3 (C) $\sqrt{15}$ (D) 5

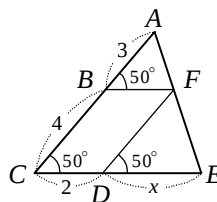


- (C) 3. 承上題，試問 $\overline{AE}$ 為多少公分？

(A) $3\sqrt{10}$ (B) 3 (C) $2\sqrt{10}$ (D) 5

- (B) 4. 如右圖，試問 $\overline{AF} : \overline{FE} = ?$

(A) 1 : 2 (B) 3 : 4 (C) 3 : 2 (D) 2 : 3



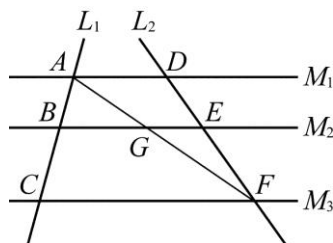
- (D) 5. 如右圖，直線 $M_1 \parallel$ 直線 $M_2 \parallel$ 直線 M_3 ，已知直線 L_1 與直線 M_1 、 M_2 、 M_3 分別交於 A 、 B 、 C 三點，直線 L_2 與直線 M_1 、 M_2 、 M_3 分別交於 D 、 E 、 F 三點。若 $\overline{DE} = 8$ 、 $\overline{EF} = 12$ 、 $\overline{GF} = 18$ ，則下列(甲)~(丙)的敘述，哪些是正確的？

(甲) $\overline{DE} : \overline{EF} = \overline{AG} : \overline{GF}$

(乙) $\overline{AF} = 30$

(丙) $3\overline{AB} = 2\overline{BC}$

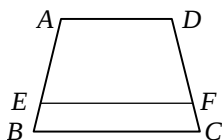
(A) 甲乙 (B) 乙丙 (C) 甲丙 (D) 甲乙丙



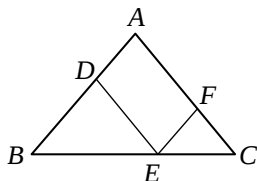
二、填充題：每格 5 分，共 65 分

1. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。若 $2\overline{AB} = 3\overline{DB}$ 、 $\overline{BC} = 30$ 、 $\overline{AE} = 12$ ，則 $\overline{DE} =$ 10、 $\overline{AC} =$ 36。

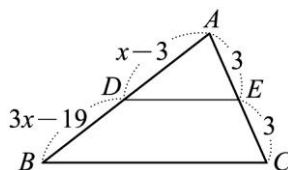
2. 如下圖(一)， $ABCD$ 為等腰梯形，且 $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 。若 $\overline{AE} : \overline{EB} = 3 : 1$ ， $\overline{AB} = 6$ cm，則 $\overline{FC} =$ $\frac{3}{2}$ cm。



圖(一)



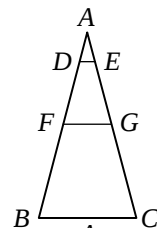
圖(二)



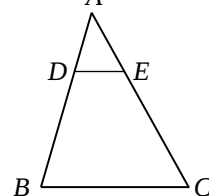
圖(三)

3. 如上圖(二)，若 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{AF} : \overline{FC} = 5 : 3$ ，且 $\overline{AD} = x+1$ ， $\overline{BD} = 2x-1$ ，則 $x =$ 8。
4. 如上圖(三)， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $x =$ 8。

5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{DE} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} : \overline{DF} : \overline{FB} = 1 : 2 : 3$ ， $\overline{AC} = 24 \text{ cm}$ ， $\overline{BC} = 12 \text{ cm}$ ，則 $\overline{AE} = \underline{4} \text{ cm}$ 。

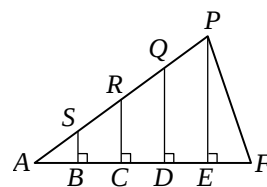


6. 如右圖，已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BD} = 2\overline{AE}$ ， $\overline{EC} = 8$ ，則 $\overline{AE} = \underline{2\sqrt{3}}$ 。

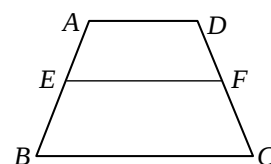


7. 在 $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{BC}$ 上一點。若 $\overline{BD} = 10$ ， $\overline{CD} = 4$ ，則：
 (1) $\triangle ABD$ 面積： $\triangle ACD$ 面積 = $\underline{5 : 2}$ 。
 (2) $\triangle ABD$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $\underline{5 : 7}$ 。

8. 如右圖， $\overline{AP}$ 上有 Q 、 R 、 S 三點。若 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$ ，且 $\overline{PE} = 8$ ，則：
 (1) $\overline{SB} = \underline{2}$ 。
 (2) $\triangle ABS$ 面積： $\triangle PEF$ 面積 = $\underline{1 : 4}$ 。

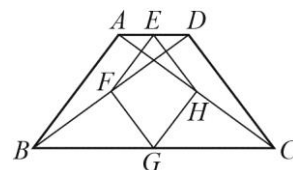


9. 如右圖，已知 $ABCD$ 為梯形，且 $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 。若 $\overline{AB} : \overline{EB} = 7 : 4$ ， $\overline{EF} = 16$ 公分， $\overline{BC} = 24$ 公分，則：
 (1) $\overline{AD} = \underline{10}$ 公分。
 (2) 梯形 $AEFD$ 面積：梯形 $EBCF$ 面積 = $\underline{39 : 80}$ 。



三、計算題：每題 5 分，共 10 分

1. 如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 12$ 。若 E 、 F 、 G 、 H 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，則四邊形 $EFGH$ 的周長為多少？



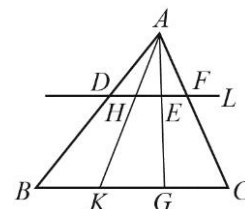
解：四邊形 $EFGH$ 的周長
 $= \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{HG} + \overline{HE}$
 $= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{CD}$
 $= \overline{AB} + \overline{CD} = 24$

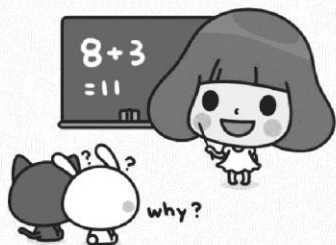
答：24

2. 如右圖，直線 $L \parallel \overline{BC}$ ，已知 $\overline{AD} : \overline{BD} = 2 : 3$ ，則 $\overline{HE} : \overline{KG} = ?$

解：在 $\triangle ABK$ 中， $\overline{AH} : \overline{AK} = \overline{AD} : \overline{AB} = 2 : 5$
 在 $\triangle AKG$ 中， $\overline{HE} : \overline{KG} = \overline{AH} : \overline{AK} = 2 : 5$

答：2 : 5

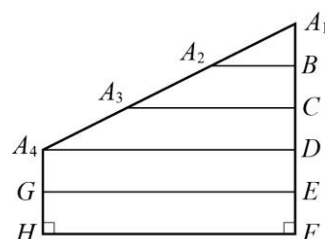




每週一題



南一百貨公司內，有一個電扶梯下方規劃親子閱讀區，設置如右圖的書櫃，已知 B 、 C 、 D 、 E 為 $\overline{A_1F}$ 等分點， $\overline{A_1F}$ 、 $\overline{A_4H}$ 分別垂直 $\overline{HF}$ 於 F 、 H ，且 $\overline{BA_2}$ 、 $\overline{CA_3}$ 、 $\overline{DA_4}$ 都與 $\overline{FH}$ 平行，試回答下列問題：



- (1) $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} = ?$
- (2) 若擺放書量與櫃子的寬度成正比，且 $\overline{CA_3}$ 那層可擺到 200 本書，則 $\overline{FH}$ 那層是否可擺 500 本書？(假設書本厚度都一樣)

解

- (1) 因為 $\overline{BA_2}$ 、 $\overline{CA_3}$ 、 $\overline{DA_4}$ 都與 $\overline{FH}$ 平行，即 $\overline{BA_2} \parallel \overline{CA_3} \parallel \overline{DA_4}$ ，
又 B 、 C 、 D 、 E 為 $\overline{A_1F}$ 等分點，
所以 $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} = \overline{A_1B} : \overline{BC} : \overline{CD} = 1 : 1 : 1$ 。
- (2) 由題意可知，
四邊形 $DFHA_4$ 為矩形 $\Rightarrow \overline{FH} = \overline{DA_4} \Rightarrow \overline{FH}$ 可擺書量即 $\overline{DA_4}$ 可擺書量
由(1) $\triangle A_1A_4D$ 中， $\overline{DA_4} : \overline{CA_3} = \overline{A_4A_1} : \overline{A_3A_1} = 3 : 2$ ，
 $\Rightarrow \overline{DA_4}$ 那層可擺書量為 $200 \times \frac{3}{2} = 300$ (本)，亦即 $\overline{FH}$ 那層可擺 300 本，
故不能擺到 500 本。

1-3 ➡ 相似形

實力養成

重點 1 縮放圖形與比例線段

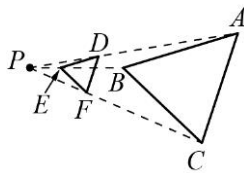
▲ 圖形縮放的性質：

- (1) 一線段經過縮放為 k 倍後，若新線段與原線段不在同一直線上，其新線段與原線段會平行。
- (2) 一線段經過縮放為 k 倍後，其新線段的長度是原線段的 k 倍。
- (3) 一角經過縮放後，其新的角和原角的度數相等。

題型 1

比例線段性質作縮放

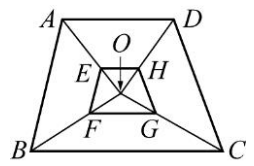
右圖中， D 、 E 、 F 三點是以 P 點為中心，分別將 A 、 B 、 C 三點與 P 點的距離縮小為 $\frac{1}{3}$ 倍的點。若 $\angle ACB = 65^\circ$ ， $\angle DEF = 60^\circ$ ，則 $\angle EDF =$ 55 度。



題型 2

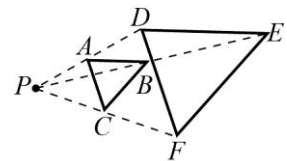
比例線段性質作縮放的應用

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AO}$ 、 $\overline{BO}$ 、 $\overline{CO}$ 、 $\overline{DO}$ 分別為 $\overline{EO}$ 、 $\overline{FO}$ 、 $\overline{GO}$ 、 $\overline{HO}$ 的 3 倍，則四邊形 $ABCD$ 的周長為四邊形 $EFGH$ 周長的 3 倍。

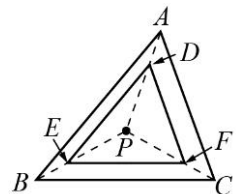


強化練習

1. 右圖中， D 、 E 、 F 三點是以 P 點為中心，分別將 A 、 B 、 C 三點與 P 點的距離放大為 2 倍的點。若 $\angle BAC = 70^\circ$ ， $\angle EFD = 60^\circ$ ，則 $\angle ABC =$ 50 度。



2. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AP}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{CP}$ 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 的 3 倍，則 $\triangle DEF$ 的周長為 $\triangle ABC$ 周長的 $\frac{2}{3}$ 倍。

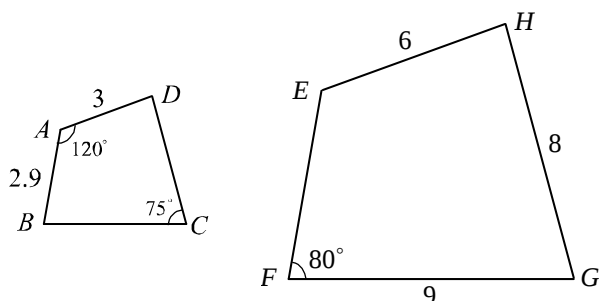


實力養成 重點 2 相似形的性質

▲ 相似多邊形：兩個邊數相同的多邊形，若它們的對應角相等，且對應邊成比例，則這兩個多邊形會相似。

題型 1 求相似形的對應邊、對應角

如下圖，設四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ ，則：



- (1) $\angle B =$ 80 度。
- (2) $\angle H =$ 85 度。
- (3) $\overline{AB} : \overline{EF} =$ 1 : 2。
- (4) $\overline{EF} =$ 5.8。
- (5) $\overline{CD} =$ 4。

題型 3 求相似形的周長

將邊長 10 公分的正方形放在影印機上，以 120% 的放大倍率連續放大兩次後，所得新的正方形周長為多少公分？

- (A) 14.4 (B) 4.8
(C) 48.4 (D) 57.6

答： (D) 。

題型 2 相似形的判斷

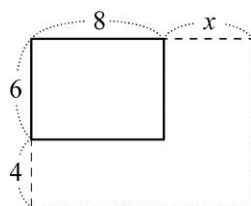
下列各圖形的各邊分別往內縮減 1 單位長後，得到另一個較小的圖形，則下列何者的新圖形和原圖形不相似？

答： (C) 。

- (A) (正三角形)
(B) (正方形)
(C) (長方形)
(D) (正五邊形)

題型 4 求相似形的對應邊

右圖矩形的長為 8 cm，寬為 6 cm。若將寬增加 4 cm，那麼長要增加 x cm，才能使所得新的矩形與原矩形相



似，則 $x =$ $\frac{16}{3}$ 。

強化練習

1. 設五邊形 $ABCDE$ 和五邊形 $A'B'C'D'E'$ 相似，且 A 、 B 、 C 、 D 、 E 的對應點依次為 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E' 。已知 $\overline{AB} = 5$ ，且它的對應邊 $\overline{A'B'} = 20$ 。

(1) 若 $\overline{CD'} = 5$ ，則 $\overline{CD'}$ 的對應邊 $\overline{CD} = \underline{1.25}$ 。

(2) 若 $\angle A = 80^\circ$ ，則 $\angle A$ 的對應角 $\angle A' = \underline{80}$ 度。

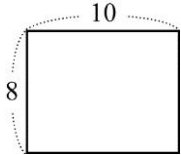
2. 已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，

(1) 若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DA} = 2 : 3 : 5 : 4$ ，且 $\overline{B'C'} = 12$ ，則四邊形 $A'B'C'D'$ 的周長 $= \underline{56}$ 。

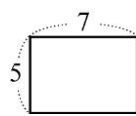
(2) 若 $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle C' = 65^\circ$ ， $\angle D = 60^\circ$ ，則 $\angle B' = \underline{145}$ 度。

3. 右圖是一個長為 8，寬為 6 的矩形。試問下列哪一個選項中的矩形與這個矩形相似？ 答： (D)。

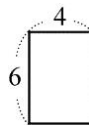
(A)



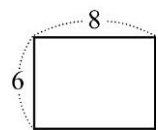
(B)



(C)



(D)



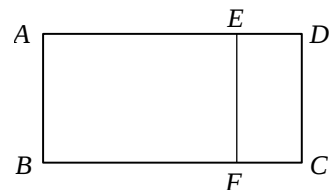
4. 將邊長 4 公分的正方形放在影印機上，以 150% 的放大倍率連續放大兩次後，所得新的正方形面積為 81 平方公分。

5. 將一個長為 10 公尺，寬為 7 公尺的長方形花園，沿著四周開闢一條寬 2 公尺的通路，則剩下的長方形花園與原長方形花園會是何種關係？

(A) 相似 (B) 不相似 (C) 全等 (D) 無法判別

答： (B)。

6. 如右圖，矩形 $ABCD \sim$ 矩形 $CFED$ 。若 $\overline{AB} = 6$ cm， $\overline{AD} = 12$ cm，則 $\overline{BF} = \underline{9}$ cm。



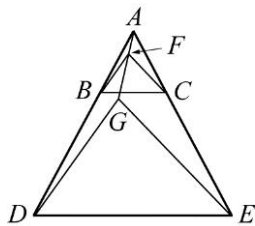
實力養成 重點 3 相似三角形的判別

▲ 相似三角形的判別：

- (1) SSS 相似性質：△ABC 與△DEF 中，若 $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF} = \overline{AC} : \overline{DF}$ ，則 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。
- (2) SAS 相似性質：△ABC 與△DEF 中，若 $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{DF}$ ， $\angle A = \angle D$ ，則 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。
- (3) AA 相似性質：△ABC 與△DEF 中，若 $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ，則 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

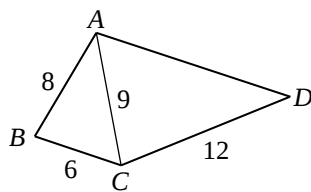
題型 1 SSS 相似

如右圖，G 為△ADE 內任一點。若 $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AF} : \overline{FG} = \overline{AC} : \overline{CE} = 1 : 2$ ，則△BCF 周長：△DEG 周長 = 1 : 3。



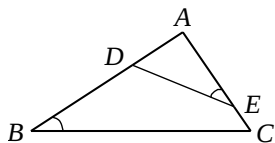
題型 2 SAS 相似

如右圖，已知 $\angle B = \angle ACD$ ， $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$ ， $\overline{BC} = 6 \text{ cm}$ ， $\overline{AC} = 9 \text{ cm}$ ， $\overline{CD} = 12 \text{ cm}$ ，則 $\overline{AD} =$ 13.5 cm。



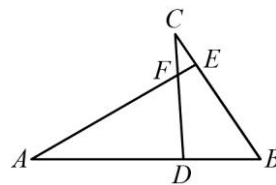
題型 3 AA 相似

如右圖，△ABC 中，已知 $\angle AED = \angle B$ 。若 $\overline{AD} = 4$ 公分， $\overline{BD} = 8$ 公分， $\overline{AE} = 6$ 公分，則 $\overline{CE} =$ 2 公分。



題型 4 SAS 相似的應用

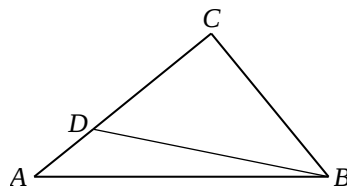
如右圖，若 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{AE} = 5$ ， $\overline{BE} = 3$ ， $\overline{CE} = 1$ ，則 $\overline{CD} =$ $\frac{10}{3}$ 。



強化練習

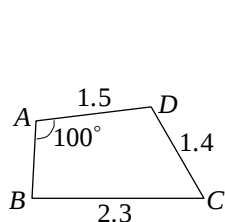
1. △ABC 與△DEF 中，已知 $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 6$ ， $\overline{DE} = 4.5$ ，則△DEF 周長為 21。

2. 如右圖，△ABC 中，D 為 $\overline{AC}$ 上一點。若 $\angle DBC = \angle A$ ， $\overline{BC} = \sqrt{6}$ ， $\overline{AC} = 3$ ，則 $\overline{CD} =$ 2。

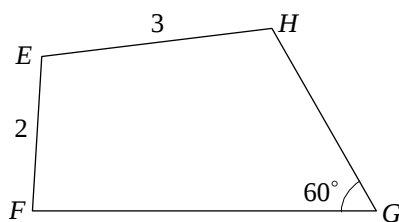


一、選擇題：每題 5 分，共 25 分

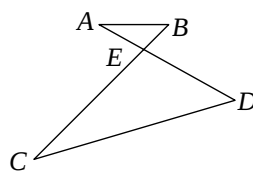
- (D) 1. 如下圖(一)、(二)，四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ 。若 $\overline{AD} = 1.5$ ， $\overline{BC} = 2.3$ ， $\overline{CD} = 1.4$ ， $\angle A = 100^\circ$ ， $\overline{EH} = 3$ ， $\overline{EF} = 2$ ， $\angle G = 60^\circ$ ，則下列何者正確？
(A) $\overline{AB} = 2$ (B) $\overline{GH} = 1.4$ (C) $\angle E = 200^\circ$ (D) $\angle C = 60^\circ$
- (C) 2. 如下圖(三)， $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 E 點。若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AE} = 3$ ， $\overline{BE} = 2$ ， $\overline{CE} = 9$ ， $\overline{DE} = 6$ ，則 $\overline{CD} = ?$
(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14



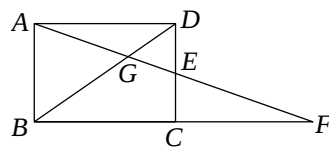
圖(一)



圖(二)

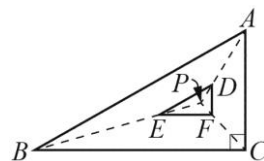
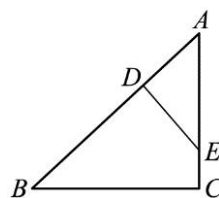


圖(三)



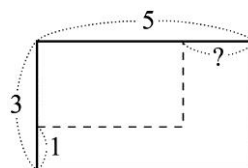
圖(四)

- (A) 3. 如上圖(四)， $ABCD$ 為長方形。若延長 $\overline{BC}$ 至 F 點，連 $\overline{AF}$ 交 $\overline{BD}$ 於 G 點，則 $\triangle CEF$ 與下列何者相似？
(A) $\triangle ABF$ (B) $\triangle AGD$ (C) $\triangle GED$ (D) $\triangle ABG$
- (C) 4. 如右圖，若 $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{AE} = 3$ ， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 4$ ，則 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ 是根據何種相似性質？
(A) AA (B) SSS
(C) SAS (D) SSA
- (D) 5. 如右圖，已知 $\overline{PD} = \frac{1}{4} \overline{PA}$ ， $\overline{PE} = \frac{1}{4} \overline{PB}$ ， $\overline{PF} = \frac{1}{4} \overline{PC}$ ，則下列(甲)~(丁)的敘述，哪些是正確的？
(甲) $\angle DEF = \frac{1}{4} \angle ABC$ (乙) $\overline{DF} = \frac{1}{4} \overline{AC}$
(丙) $\angle BAC = 4 \angle EDF$ (丁) $\overline{BC} = 4 \overline{EF}$
(A) 甲乙 (B) 乙丙 (C) 丙丁 (D) 乙丁

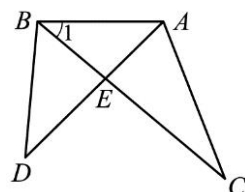


二、填充題：每格 5 分，共 65 分

1. 右圖是長、寬分別為 5 cm、3 cm 的長方形，若將寬減少 1 cm，則長最少要減 $\frac{5}{3}$ cm，所得的長方形才會與原長方形相似。



2. 如右圖，已知 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於 E 點，其中 $\angle 1 = \angle D$ ，依據 AA 相似性質，可知 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ADB$ 相似。



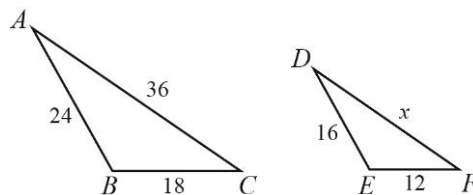
3. 承上題，若 $\overline{AE} = 3.5$ cm， $\overline{AB} = 5$ cm，則 $\overline{AD} =$ $\frac{50}{7}$ cm。

4. 已知坐標平面上， $\triangle ABC$ 是 $\triangle DEF$ 放大為 k 倍的相似三角形。若 $A(12, 0)$ 、 $B(12, -6)$ 、 $C(-6, 12)$ 、 $D(4, -2)$ 、 $E(-2, 4)$ 、 $F(4, 0)$ ，則 $\triangle ABC$ 的周長是 $\triangle DEF$ 周長的 3 倍。

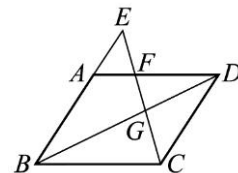
5. 已知 $\triangle ABC$ 是 $\triangle DEF$ 的放大圖，則：

(1) $x = \underline{24}$ 。

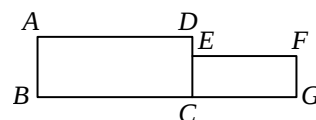
(2) $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的 $\frac{2}{3}$ 倍縮小圖。



6. 如右圖， $ABCD$ 是平行四邊形，若 $3\overline{FG} = 2\overline{CG}$ ，則 $\overline{EF} : \overline{EC} = \underline{1 : 3}$ 。



7. 如右圖，已知長方形 $ABCD \sim$ 長方形 $ECGF$ ，且 $\overline{DE} = x$ ， $\overline{FG} = 5$ ，且 $\overline{AD} : \overline{CG} = 10 : 7$ ，則 $x = \underline{\frac{15}{7}}$ 。



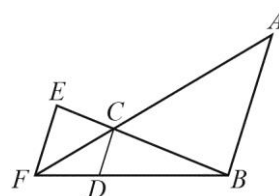
8. 已知一長方形的長為 8 公分、寬為 5 公分。若將此長方形的長增加 2 公分，則寬須增加 1.25 公分或 11 公分，才能與原長方形相似。

9. 如右圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ 。若 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{CD} = 2$ ，試求：

(1) $\overline{BD} : \overline{DF} = \underline{2 : 1}$ 。

(2) $\overline{CD} : \overline{EF} = \underline{2 : 3}$ 。

(3) $\overline{EF} = \underline{3}$ 。



三、計算題：每題 5 分，共 10 分

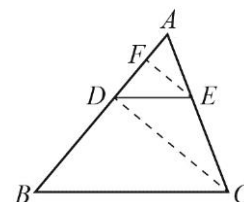
1. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$ 。若 $\overline{AF} = 16$ ， $\overline{AD} = 40$ ，則 $\overline{AB} = ?$

解：由題意可得 $\overline{AF} : \overline{AD} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AD} : \overline{AB}$

$\Rightarrow 16 : 40 = 40 : \overline{AB}$

$\Rightarrow \overline{AB} = 100$

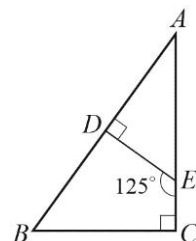
答：100

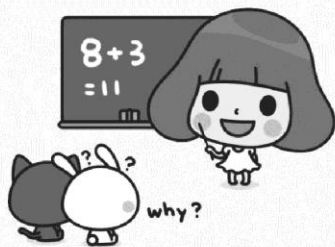


2. 如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle AED$ 相似。若 $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle DEC = 125^\circ$ ，則 $\angle B = ?$

解： $\angle B = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

答：55°

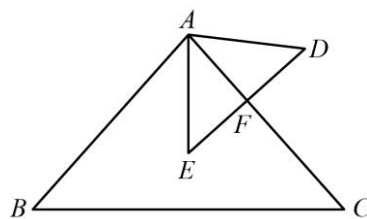




每週一題



如右圖，已知 $\angle C = \angle D$ ， $\angle BAE = \angle DAF$ ，
 $\triangle AEF \cong \triangle ADF$ ，且 $\overline{AE} = \overline{AD} = 3$ ，
 $\overline{EF} = \overline{DF} = 2$ ，試回答下列問題：



- (1) 說明 $\angle BAE = \angle DAF = \angle EAF$ 。
- (2) 若 $\overline{BC} = 8$ ，則 $\overline{AC} = ?$

解

$$(1) \because \triangle AEF \cong \triangle ADF$$

$$\therefore \angle EAF = \angle DAF$$

又因為 $\angle BAE = \angle DAF$ ，所以 $\angle BAE = \angle DAF = \angle EAF$ 。

$$(2) \because \angle BAC = \angle BAE + \angle EAF = \angle DAF + \angle EAF = \angle EAD, \angle C = \angle D$$

$$\therefore \triangle BAC \sim \triangle EAD \text{ (AA 相似性質)}$$

$$\text{得 } \overline{BC} : \overline{ED} = \overline{AC} : \overline{AD}$$

$$8 : (2+2) = \overline{AC} : 3$$

$$8 : 4 = \overline{AC} : 3$$

$$4 \overline{AC} = 24$$

$$\overline{AC} = 6$$

故 $\overline{AC} = 6$ 。

1-4 ➡ 相似形的應用

實力養成 重點 1 相似三角形的性質

▲ 相似三角形的性質：

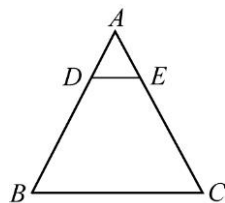
- (1) 對應高的比＝對應邊長的比。
- (2) 面積的比＝對應邊平方的比。

題型 1 對應邊與高的比

已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，且 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = 2 : 3$ 。若 $\overline{AE}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高， $\overline{A'E'}$ 為 $\overline{B'C'}$ 上的高，則 $\overline{AE} : \overline{A'E'} = \underline{2 : 3}$ 。

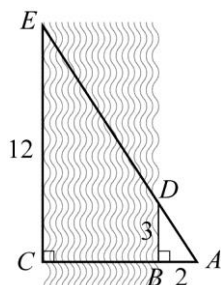
題型 2 面積＝邊長平方比

如右圖， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。
若 $\overline{AD} : \overline{AB} = 2 : 7$ ，
且 $\triangle ABC$ 面積為 49 cm^2 ，則 $\triangle ADE$ 面積為 $\underline{4} \text{ cm}^2$ 。



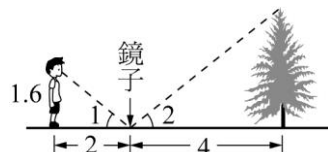
題型 3 三角形的測量 I

如右圖，祖生設計兩個直角三角形來測量河寬 $\overline{BC}$ 。若 $\overline{AB} = 2$ 公尺， $\overline{BD} = 3$ 公尺， $\overline{CE} = 12$ 公尺，則河寬 $\overline{BC}$ 為 $\underline{6}$ 公尺。



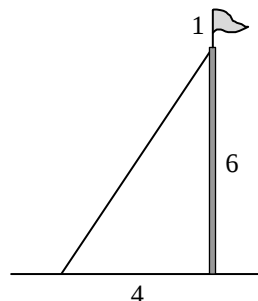
題型 4 三角形的測量 II

如右圖，創創想測量樹高，他先在樹的西方 4 公尺處的地面上平放一面鏡子，再由鏡子西方 2 公尺處向鏡子看，透過光的反射看到了樹梢。根據光的反射定律，知道 $\angle 1 = \angle 2$ 。若創創的身高為 1.6 公尺，則樹高為 $\underline{3.2}$ 公尺。



題型 5 三角形的測量 III

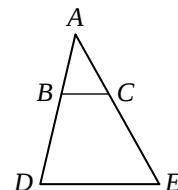
如右圖，一根竹竿長 6 公尺，當時的影子長 4 公尺。若同一時間，在竹竿頂端插一支旗子，且旗子高出竹竿頂 1 公尺，則旗子的影子長為 $\underline{\frac{2}{3}}$ 公尺。



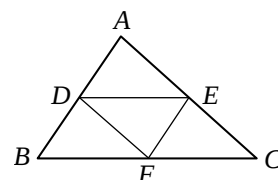
強化練習

1. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高， $\overline{A'H'}$ 為 $\overline{B'C'}$ 上的高。若 $\overline{BC} = 16$ ， $\overline{B'C'} = 20$ ，則 $\overline{AH} : \overline{A'H'} =$ 4 : 5。

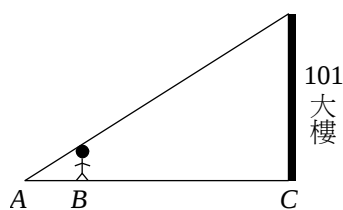
2. 如右圖， $\triangle ADE$ 中， $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ ，且 $\overline{AC} : \overline{AE} = 2 : 5$ ，則 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle ADE$ 面積 = 4 : 25。



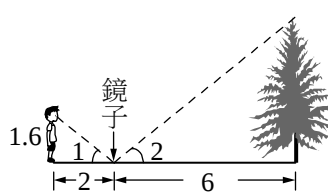
3. 如右圖， D 、 E 、 F 分別為三邊長 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點，則 $\triangle DEF$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = 1 : 4。



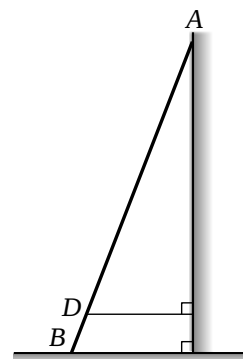
4. 如下圖(一)，若101大樓高594 m，人高1.8 m， $\overline{AC} = 990$ m，則人與101大樓間的距離 $\overline{BC} =$ 987 m。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

5. 如上圖(二)，李先生想測量樹高，他先在樹的前面6公尺處放一面鏡子，再由鏡子前2公尺處向鏡子看，透過光的反射看到了樹梢。已知李先生的身高是1.6公尺，且 $\angle 1 = \angle 2$ ，則樹高為 4.8 公尺。
6. 如上圖(三)， $\overline{AB}$ 是斜靠在牆壁上的長梯，梯腳 B 距離牆腳1.6公尺， D 點距離牆壁1.4公尺， $\overline{BD} = 0.55$ 公尺，則梯子長度 $\overline{AB}$ 為 4.4 公尺。

實力養成 重點 2 直角三角形的邊長比

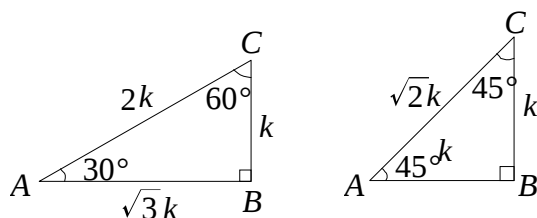
1. 特殊直角三角形的邊長關係：

(1) 如右圖，在 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 三角形中，

$$\overline{BC} : \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{3} : 2。$$

(2) 如右圖，在 $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ 三角形中，

$$\overline{BC} : \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 1 : \sqrt{2}。$$

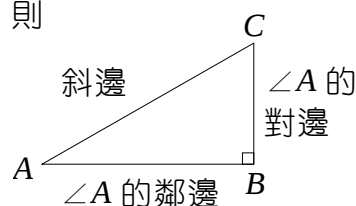


2. 直角三角形的邊長比：

如右圖，在直角三角形 ABC 中，若 $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle A$ 為一銳角，則

$$(1) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \sin A \quad (2) \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \cos A$$

$$(3) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \tan A$$



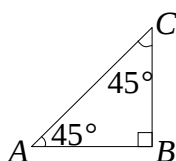
題型 1 直角三角形的邊長關係

1. 如右圖，在直角三角形

ABC 中，若 $\overline{AB} = 3$ ，

則 $\overline{BC} =$ 3，

$\overline{AC} =$ $3\sqrt{2}$ 。

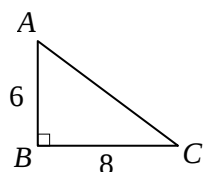


2. 有一直角三角形 ABC 如右圖，

$$\text{則 } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{4}{5}，$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}，$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{4}。$$



題型 2 直角三角比的應用

某校在校園內設置一個無障礙通行坡道如下

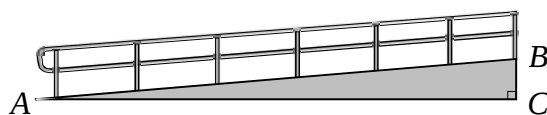
圖，已知坡度 $= \frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}} = \frac{1}{12}$ 。若校長想

再建一個一模一樣的坡道在校園另外一處，

於是請秘書去測量該坡道的三邊數據，結果

秘書報告書只記錄高度 $\overline{BC} = \frac{3}{4}$ 公尺，則

此坡道的水平寬度 $\overline{AC} =$ 9 公尺。



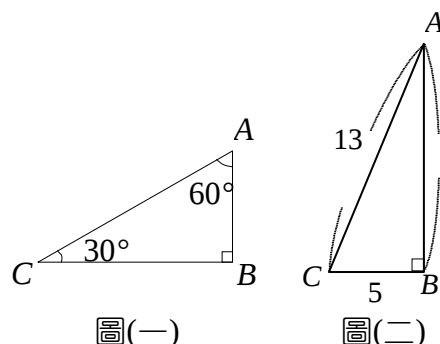
強化練習

1. 如右圖(一)，在直角三角形 ABC 中，若 $\overline{AB} = 5$ ，

則 $\overline{BC} =$ $5\sqrt{3}$ ， $\overline{AC} =$ 10。

2. 有一直角三角形 ABC 如右圖(二)，則 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} =$ $\frac{5}{13}$ ，

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{12}{13}，\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{12}{5}。$$



若小蘭想製作一個正三角形的賀年卡給新一，於是拿了一張邊長 20 公分的正方形色卡剪裁，則此正三角形賀年卡的高度最多為 $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ 公分。

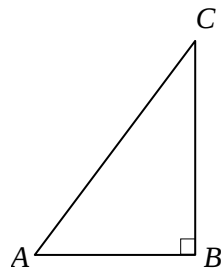
一、選擇題：每題 6 分，共 30 分

(D) 1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60^\circ$ ， $\angle C=30^\circ$ ，若 $\overline{AC}=10$ ，則 $\overline{BC}=?$

- (A) 5 (B) 10
(C) $5\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{3}$

(D) 2. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle B=90^\circ$ ， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{BC}=4$ ，求 $\sin A=?$

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$



(B) 3. 在地圖上面積為 4 平方公分的森林，實際面積為 64 公畝，則此地圖的比例尺為多少？(1 公畝=100 平方公尺)

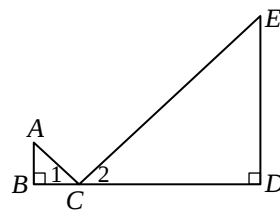
- (A) 1:200 (B) 1:4000
(C) 1:160000 (D) 1:16000000

(D) 4. 若 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，且 $\overline{AB}=\frac{1}{2}$ ， $\overline{BC}=\frac{2}{3}$ ， $\overline{CA}=1$ ， $\overline{EF}=2$ ，則下列何者正確？

- (A) $\overline{DE}=\frac{1}{6}$ (B) $3\triangle ABC$ 面積 $=\triangle DEF$ 面積
(C) $\overline{DF}=\frac{3}{2}$ (D) $\triangle DEF$ 周長 $=3\triangle ABC$ 周長

(C) 5. 如右圖，某人眼睛到腳的高度 (即 $\overline{AB}$ 長) 為 140 公分。將鏡子放置於 C 處測量樹高 (即 $\overline{DE}$ 長)，且 $\angle 1=\angle 2$ ， $\overline{BC}=1.5$ 公尺， $\overline{CD}=6$ 公尺，則樹高為多少公尺？

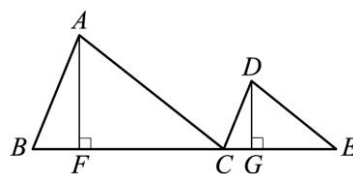
- (A) 5.2 (B) 5.4
(C) 5.6 (D) 5.8



二、填充題：每格 6 分，共 60 分

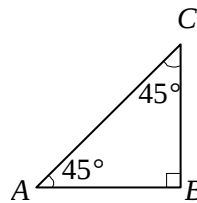
1. 如右圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{DG} \perp \overline{CE}$ ，且 B、F、C、G、E 五點在同一直線上。若 $\overline{AF} : \overline{DG} = 5 : 3$ ， $\overline{BE} = 24$ ，則：

- (1) $\overline{BC} =$ 15， $\overline{CE} =$ 9。
(2) $\triangle ABC$ 面積： $\triangle CDE$ 面積 $=$ 25:9。

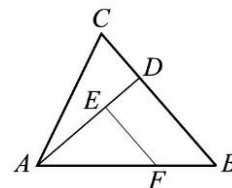


2. 有一天下午，小胡與爸爸在公園散步時發現他的影子比爸爸的影子短，而且量得爸爸的影子長為 270 公分。若小胡的身高為 170 公分，爸爸的身高為 180 公分，則小胡的影子長為 255 公分。

3. 如右圖，直角 $\triangle ABC$ 的 $\angle A = \angle C = 45^\circ$ ，若 $\overline{BC} = 6$ ，
則 $\overline{AC} = \underline{6\sqrt{2}}$ 。

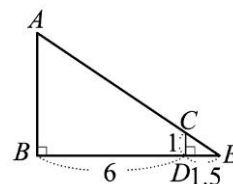


4. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{BD} = 2\overline{CD}$ ， $\overline{AF} = 2\overline{FB}$ ，
 $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ 。若 $\triangle AEF$ 的面積為 32，則 $\triangle ABC$ 的
面積為 108。



5. 菱形 $ABCD$ 的周長為 40 公分， $\angle A = 120^\circ$ 。若 P 、 Q 、 R 、 S 分別為菱形 $ABCD$ 各邊的中點，則：
(1) 四邊形 $PQRS$ 的周長 = $10 + 10\sqrt{3}$ 公分。
(2) 四邊形 $PQRS$ 的面積 = $25\sqrt{3}$ 平方公分。

6. 如右圖， $\overline{AB}$ 為一棵樹， $\overline{CD}$ 為一根長 1 m 的標竿，離樹 6 m。
若於 $\overleftrightarrow{BD}$ 上找一點 E ，使 A 、 C 、 E 三點共線，且 $\overline{DE} = 1.5$ m，
則樹高 $\overline{AB} = \underline{5}$ m。



7. 在地上置有一燈，照著一面高牆，已知有一個人的身高為 1.5 公尺，自光源向牆壁走近 3 公尺，牆上的人影恰好也為 3 公尺。若此人再向前走 2 公尺時，則牆上的人影為 1.8 公尺。

三、計算題：共 10 分

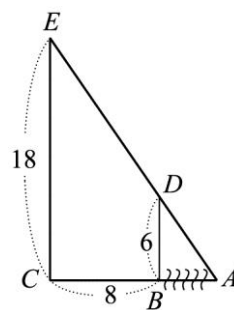
1. 如右圖，明仁設計兩個直角三角形來測量河寬 $\overline{AB}$ ， B 、 D 兩點分別在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AE}$ 上。若 $\overline{BC} = 8$ m， $\overline{BD} = 6$ m， $\overline{CE} = 18$ m，則河寬 $\overline{AB} = ?$

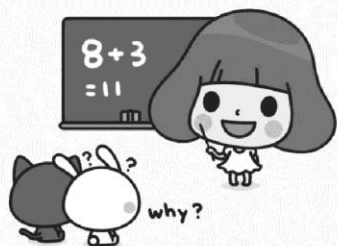
解：設河寬 $\overline{AB} = x$ (m)

$$\because \triangle ABD \sim \triangle ACE \quad \therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CE}$$

$$x : (x + 8) = 6 : 18, 6x + 48 = 18x, 12x = 48, x = 4$$

答：4 m





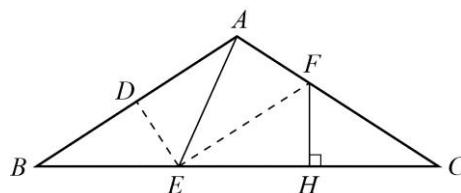
每週一題



如附圖，等腰三角形 ABC 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，將 B 點往 A 點上摺，再摺回，得摺線 $\overline{DE}$ ， $\overline{DE}$ 分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 於 D 、 E ，連接 $\overline{AE}$ ，將 $\overline{CE}$ 摺到 $\overline{AE}$ 上，再摺回，得摺線 $\overline{EF}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F ，並作 $\overline{FH} \perp \overline{BC}$ 於 H 。

(1) 請說明 $\angle AEC = 2\angle ABC$ 。

(2) 請說明 $\triangle BED \sim \triangle EFH$ 。



解

(1) $\because \overline{DE}$ 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 $\Rightarrow \overline{EA} = \overline{EB}$

$\therefore \triangle EAB$ 為等腰三角形 $\Rightarrow \angle EAB = \angle EBA = \angle ABC$

故 $\angle AEC = \angle EAB + \angle EBA = 2\angle ABC$ (外角定理)。

(2) 依題意可知 $\angle FEH = \angle FEA = \frac{1}{2} \angle AEC$ ，

又由(1)可知 $\angle AEC = 2\angle ABC \Rightarrow \angle FEH = \angle ABC$ 。

$\because \overline{DE}$ 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，且 $\overline{FH} \perp \overline{BC}$

$\therefore \angle EDB = \angle EHF = 90^\circ$

故 $\triangle BED \sim \triangle EFH$ (AA相似性質)。

第 2 章 圓的性質

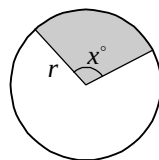
2-1 圓形及點、直線與圓之間的關係

實力養成 重點 1 圓、扇形與弓形

若扇形所對的圓心角為 x° ，則：

$$(1) \text{ 弧長} = \text{圓周長} \times \frac{\text{弧所對的圓心角度數}}{360} = 2\pi r \times \frac{x}{360}。$$

$$(2) \text{ 扇形面積} = \text{圓面積} \times \frac{\text{扇形中弧所對的圓心角度數}}{360} = \pi r^2 \times \frac{x}{360}。$$



題型 1 圓的性質判別

下列敘述何者錯誤？

- (A) 圓上任取兩點所連成的線段稱為弦
- (B) 圓的一弦與其所對弧組成的圖形稱為弓形
- (C) 圓上最短的弦就是半徑
- (D) 任兩半徑與其夾弧所組成的圖形稱為扇形

答：(C)。

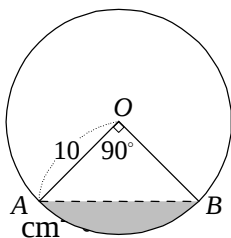
題型 3 求三角形與弓形面積

如右圖， $\angle AOB = 90^\circ$ ，
圓 O 的半徑 = 10 cm。

試問：

$$(1) \triangle AOB \text{ 面積} = \underline{50} \text{ cm}^2。$$

$$(2) \text{ 弓形面積} = \underline{25\pi - 50} \text{ cm}^2。$$

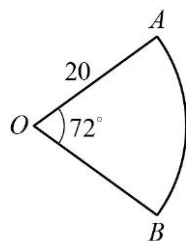


題型 2 求弧長與扇形面積

如右圖，扇形 AOB 中，若
 $\angle AOB = 72^\circ$ ， $OA = 20$ cm，
則：

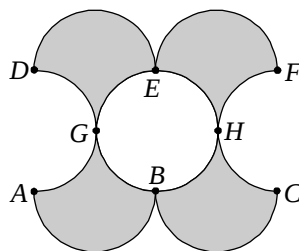
$$(1) \widehat{AB} = \underline{8\pi} \text{ cm}。$$

$$(2) \text{ 扇形面積} = \underline{80\pi} \text{ cm}^2。$$



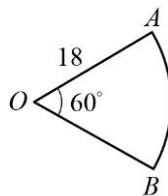
題型 4 求複合圖形面積

如右圖， $\widehat{AB}$ 、 $\widehat{BC}$ 、 $\widehat{DE}$ 、 $\widehat{EF}$ 、 $\widehat{AGD}$ 、 $\widehat{BGE}$ 、 $\widehat{BHE}$ 、 $\widehat{CHF}$
都是直徑為 2 的半圓，則灰色部分面積為 8。



強化練習

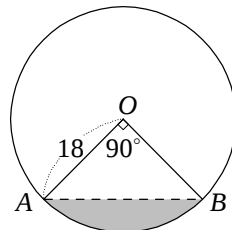
1. 如右圖，扇形 AOB 中，若 $\angle AOB = 60^\circ$ ， $OA = 18$ cm，
則 $\widehat{AB} = \underline{6\pi}$ cm，扇形面積 = $\underline{54\pi}$ cm²。



2. 如右圖，若 $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = 18$ cm，則：

$$(1) \triangle AOB \text{ 面積} = \underline{162} \text{ cm}^2。$$

$$(2) \text{ 弓形面積} = \underline{81\pi - 162} \text{ cm}^2。$$



3. 小伊布置教室，先用壁報紙剪出一個直徑 20 公分的圓，再將此圓對摺 3 次後，摺出的圖形為扇形，其圓心角為 45 度。

- 已知一圓的圓心為 O ， P 為同一平面上的一點，圓 O 的半徑為 r 。
 - 若 $\overline{OP} > r$ ，則 P 點在圓外。
 - 若 $\overline{OP} = r$ ，則 P 點在圓上。
 - 若 $\overline{OP} < r$ ，則 P 點在圓內。
- 直線 L 和圓 O 的位置關係：
 - 不相交：圓心 O 到 L 的距離大於半徑。
 - 恰交於一點 (L 是圓 O 的切線)：圓心 O 到 L 的距離等於半徑。
 - 相交於兩點 (L 是圓 O 的割線)：圓心 O 到 L 的距離小於半徑。
- 一弦的弦心距必垂直平分此弦。
 - 在同一圓中，弦愈長，所對應的弦心距愈短；弦心距愈長，所對應的弦愈短。

題型 1 判斷點與圓的位置關係

已知一圓的直徑為 6 公分，有一點 P 與圓心相距 $\sqrt{10}$ 公分，則 P 點必在：

(A) 圓內 (B) 圓上 (C) 圓外

答：(C)。

題型 2 由點與圓的位置關係判斷半徑

有一圓的圓心 O 與 A 、 B 、 C 三點的距離分別為 $\overline{OA} = 5$ ， $\overline{OB} = 7$ ， $\overline{OC} = 9$ 。已知 A 、 B 、 C 三點中，有兩點在圓內，有一點在圓外，則此圓的半徑 r 可能的範圍為

$7 < r < 9$ 。

題型 3 求點到圓的距離

如右圖， A 在圓 O 外，

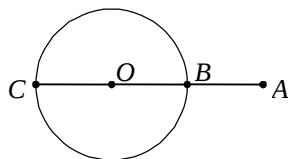
$\overline{AC}$ 交圓 O 於 B 、 C 兩點。已知 $\overline{OA} = 6$

公分，圓 O 的半徑為

3 公分，則：

(1) A 到圓 O 的最短距離為 3 公分。

(2) A 到圓 O 的最長距離為 9 公分。



題型 4 直線與圓的位置關係 I

已知圓 O 的半徑為 6，且圓心 O 到三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離分別為 4、6、8，則：

(1) 直線 L_1 和圓 O 相交於兩點。

(2) 直線 L_2 和圓 O 相交於一點。

(3) 直線 L_3 和圓 O 不相交。

題型 5 直線與圓的位置關係 II

已知圓 O 的半徑為 5，且圓心 O 到三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離分別為 3、5、7，則其中圓 O 的切線是直線 L_2 ，割線是直線 L_1 ，而直線 L_3 與圓 O 不相交。

題型 7 求弦心距

已知一圓的直徑是 10 公分，且有一弦 $\overline{AB}$ 的長為 8 公分，則此弦到圓心的距離為 3 公分。

題型 9 利用弦心距求直徑 II

已知一圓的直徑 $\overline{AB}$ 平分此圓的弦 $\overline{CD}$ 於 M 。若 $\overline{AM} > \overline{BM}$ ，且 $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{MB} = 1$ ，則 $\overline{AB} =$ 10。

題型 6 利用弦心距求直徑 I

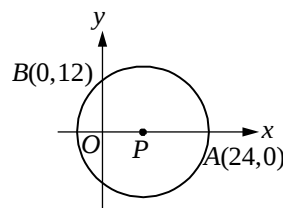
已知有一圓 O ， $\overline{AB}$ 為其一弦，且 $\overline{AB} = 24$ 公分，此弦到圓心的距離是 5 公分，則此圓 O 的直徑為 26 公分。

題型 8 求不同弦的弦心距

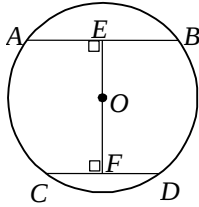
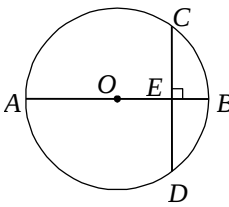
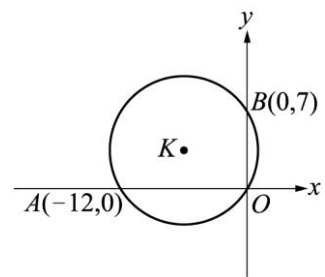
圓中有一弦長為 24 公分，此弦的弦心距是 5 公分。若此圓的另一弦長是 10 公分，則此弦的弦心距是 12 公分。

題型 10 弦心距垂直平分弦的應用

如右圖，圓 P 與 x 軸相交於 $A(24, 0)$ ，且與 y 軸相交於 $B(0, 12)$ ，則圓心 P 的坐標為 (9, 0)。

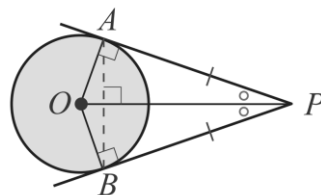


強化練習

- 有一圓的直徑是 10 公分。請在空格中填入外、內或上：
 - 有一點 P 與圓心相距 7 公分，則 P 點必在圓 外。
 - 有一點 Q 與圓心相距 5 公分，則 Q 點必在圓 上。
 - 有一點 R 與圓心相距 3 公分，則 R 點必在圓 內。
- 若圓 O 的半徑為 6， P 為圓 O 內部一點， $\overline{OP} = t$ ，則 t 的範圍為 $0 \leq t < 6$ 。
- 若圓 O 的半徑為 6，圓外一點 P 到圓心 O 的距離為 10，則 P 點到圓 O 的最短距離為 4， P 點到圓 O 的最長距離為 16。
- 設圓的直徑是 16 公分，若一直線與圓心的距離為 $\sqrt{53}$ 公分，則此直線與圓相交於 2 個點。
 - 設圓 O 的直徑為 13 公分，若圓心 O 與三直線 L 、 M 、 N 的距離分別為 5 公分、6.5 公分、8 公分，則哪一條直線與圓 O 不相交？ 答： N 。
- 圓 O 的半徑為 13 公分，圓心 O 到弦 $\overline{AB}$ 的弦心距為 12 公分，則 $\overline{AB} =$ 10 公分。
- 已知圓 O 的一弦 $\overline{AB} = 12$ 公分，弦心距為 4 公分，則圓 O 面積為 52π 平方公分。
- 如右圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 的兩弦， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。若一圓 O 的半徑為 10 公分， $\overline{AB} = 16$ 公分， $\overline{CD} = 12$ 公分，則兩弦 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的距離 $\overline{EF} =$ 14 公分。
- 如右圖，已知 $\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，且 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{AE} = \overline{CD} = 8$ ，則 $\overline{CD}$ 的弦心距 $\overline{OE} =$ 3。
- 如右圖，圓 K 與坐標軸交於原點 O 、點 $A(-12, 0)$ 與點 $B(0, 7)$ ，則圓心 K 的坐標為 $(-6, 3.5)$ 。

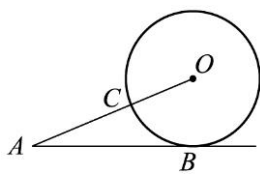
實力養成 重點 3 圓的切線

1. 圓心到切線的距離等於圓的半徑。
2. 如右圖，若 P 點在圓 O 的外部， $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點，則：
 - (1) $\overline{AP} = \overline{BP}$ 。
 - (2) $\overline{OP}$ 平分 $\angle APB$ ，即 $\angle APO = \angle BPO$ 。
 - (3) $\overline{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ 。



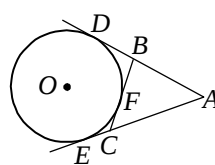
題型 1 切線性質的應用

如右圖， $\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 B ， $\overline{AO}$ 交圓 O 於 C 。若 $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{OC} = 8$ ，則 $\overline{AC} =$ 9。



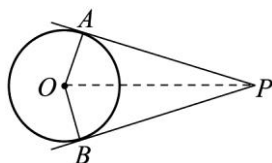
題型 2 圓外一點到圓的兩切線等長

如右圖， $\overleftrightarrow{AD}$ 、 $\overleftrightarrow{AE}$ 、 $\overline{BC}$ 分別切圓 O 於 D 、 E 、 F 三點。若 $\overline{AD} = 15$ 公分，則 $\triangle ABC$ 周長為 30 公分。



題型 3 圓的切線性質應用 I

如右圖， P 點在圓 O 的外部， $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點。

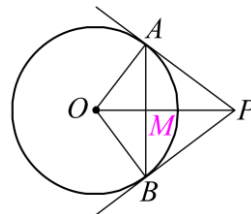


(1) 若 $\angle APB = 35^\circ$ ，則 $\angle AOB =$ 145 度。

(2) 若 $\overline{AO} = 7$ ， $\overline{OP} = 25$ ，則四邊形 $AOBP$ 的面積為 168。

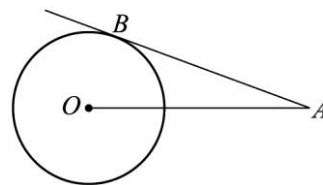
題型 4 圓的切線性質應用 II

如右圖， P 點在圓 O 的外部，且 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點。若圓 O 的半徑為 6， $\overline{PA} = 8$ ，則 $\overline{AB} =$ $\frac{48}{5}$ 。

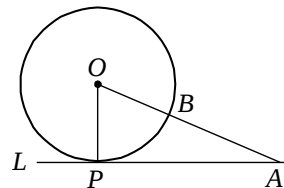


強化練習

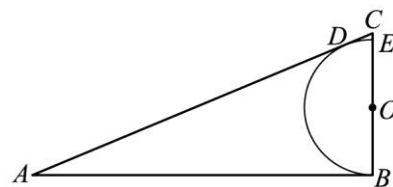
1. 如右圖， $\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 B 點。若 $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AO} = 26$ ，則圓 O 的周長為 20π 。



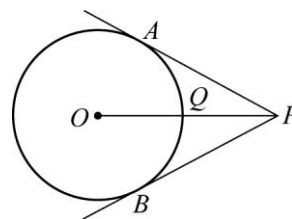
2. 如右圖，直線 L 與圓 O 相切於 P 點， A 為直線 L 上一點， $\overline{AO}$ 與圓 O 交於 B 點。若 $\overline{PA} = 12$ ， $\overline{AB} = 8$ ，則圓 O 的半徑為 5 。



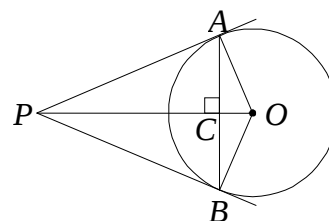
3. 如右圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ，半圓和 $\overline{AC}$ 相切於 D 點，和 $\overline{BC}$ 相交於 B 、 E 兩點。已知 $\overline{AC} = 13$ ， $\overline{BC} = 5$ ，則圓 O 的半徑為 2.4 。



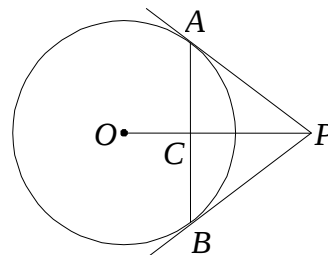
4. 如右圖，已知圓 O 及圓外一點 P ， $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的切線。若圓 O 直徑為 16 cm ， $\overline{PQ} = 9\text{ cm}$ ，則切線段 $\overline{PA} =$ 15 cm 。



5. 如右圖， P 點在圓 O 的外部，且 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點。若 $\overline{OP} = 13$ ， $\overline{PA} = 12$ ，則四邊形 $AOBP$ 的面積為 60 。

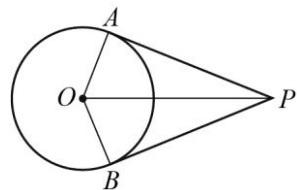


6. 如右圖， P 點在圓 O 的外部，且 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點。若圓 O 的半徑為 3 ， $\overline{PA} = 4$ ，則 $\overline{AB} =$ $\frac{24}{5}$ 。



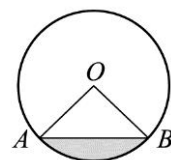
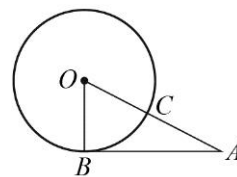
一、選擇題：每題 5 分，共 25 分

- (A) 1. 已知一圓 O 的直徑為 10 公分，若有一點 P 在圓 O 內，則 P 點到圓心的距離可能為多少公分？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- (A) 2. 大、小兩個圓的圓心都是 O 點，它們的半徑分別為 6 cm 與 3 cm。若 O 點至直線 L 的距離為 5 cm，則下列敘述何者正確？
(A) 直線 L 為大圓的割線
(B) 直線 L 為大圓的切線
(C) 直線 L 為小圓的割線
(D) 直線 L 為小圓的切線
- (B) 3. 如右圖，若 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 分別切圓 O 於 A 、 B 兩點，則下列何者錯誤？
(A) $\triangle AOP \cong \triangle BOP$
(B) $\overline{AO} \perp \overline{PO}$ 且 $\overline{BO} \perp \overline{PO}$
(C) 若 $\angle AOP = 50^\circ$ ，則 $\angle APB = 80^\circ$
(D) 若 $\overline{PA} = 12$ ， $\overline{BO} = 5$ ，則 $\overline{PO} = 13$
- (B) 4. 若欲利用對摺法找出一個圓的圓心，則至少要摺幾次？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (D) 5. 已知一圓上有相異 3 點，則可在圓上決定出多少個弧？
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6



二、填充題：每格 5 分，共 65 分

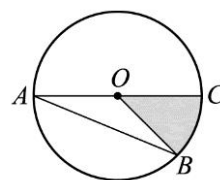
1. 若圓 O 的直徑為 4 公分，則圓心到此圓之任一條切線的距離為 2 公分。
2. 已知圓 O 的半徑為 7 公分，圓心 O 點到直線 L 的距離為 5 公分，則圓 O 與直線 L 共有 2 個交點。
3. 如右圖， $\overline{AB}$ 切圓 O 於 B 點， $\overline{AO}$ 交圓 O 於 C 點。已知 $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AO} = 25$ ，則此圓的半徑為 7。
4. 如右圖，若圓 O 半徑為 4 公分，且 $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ ，則灰色區域的面積為 $4\pi - 8$ 平方公分。



5. 已知一圓的半徑為 10 公分，則圓上相異兩點最長的距離是 20 公分。

6. 依據右圖，回答下列問題：

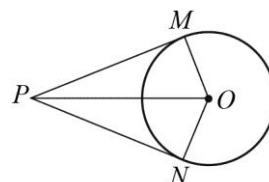
- (1) A 、 B 兩點連接的線段稱為 弦。
- (2) $\overline{AC}$ 是圓 O 上通過圓心的弦，也就是 直徑。
- (3) 半徑 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 與 $\widehat{BC}$ 所圍成的灰色部分稱為 扇形。
- (4) $\overline{AB}$ 與其所對的弧所圍成的區域稱為 弓形。



7. 如右圖， P 為圓 O 外一點， $\overline{PM}$ 、 $\overline{PN}$ 為圓 O 的切線，

M 、 N 為切點。若半徑為 5， $\overline{OP} = 13$ ，則：

- (1) $\angle MON + \angle MPN =$ 180 度。
- (2) 四邊形 $OMPN$ 的周長 = 34。
- (3) 四邊形 $OMPN$ 的面積 = 60。
- (4) $\overline{MN} =$ $\frac{120}{13}$ 。



三、計算題：每題 5 分，共 10 分

1. 若一個扇形的半徑是 9，弧長是 6π ，則扇形的面積為多少？

解： 扇形面積 $= 9^2 \times \pi \times \frac{6\pi}{2 \times 9 \times \pi} = 27\pi$

答： 27π

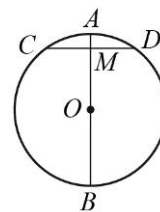
2. 如右圖，圓 O 的直徑 $\overline{AB}$ 平分弦 $\overline{CD}$ 於 M 點， $\overline{CD} = 6$ 公分， $\overline{AM} = 1$ 公分，則圓 O 的周長為多少公分？

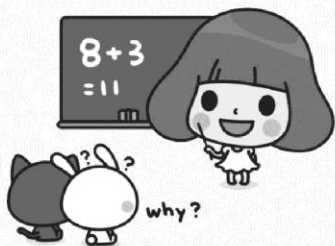
解： 設 $\overline{OC} = x$ 公分，則 $\overline{OM} = (x-1)$ 公分
 $\overline{CM} = 6 \div 2 = 3$

$$\therefore x^2 = (x-1)^2 + 9 \Rightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 + 9 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

故圓 O 的周長 $= 2 \times \pi \times 5 = 10\pi$ (公分)

答： 10π 公分



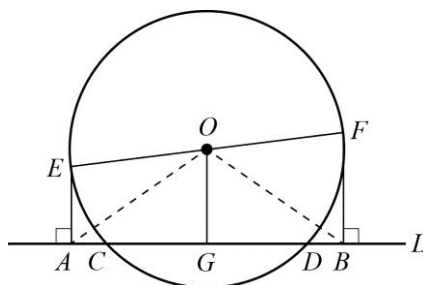


每週一題



如右圖，已知 $\overline{EF}$ 為圓 O 的直徑， $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 皆垂直 L ， $\overline{OG}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距， $\overline{AO} = \overline{BO}$ ，試回答下列問題：

- (1) 說明 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。
- (2) 若 $\overline{AE} = 4$ ， $\overline{BF} = 6$ ， $\overline{CD} = 24$ ，則圓 O 的面積是多少？



解

- (1) $\because \overline{OG}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距，且 $\overline{AO} = \overline{BO}$

$$\therefore \overline{AG} = \overline{BG}$$

$\because \overline{OG}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距

$$\therefore \overline{CG} = \overline{DG}$$

$$\text{因此 } \overline{AG} - \overline{CG} = \overline{BG} - \overline{DG},$$

$$\text{故 } \overline{AC} = \overline{BD}。$$

- (2) 因為四邊形 $AEFB$ 為梯形，且 O 、 G 分別為 $\overline{EF}$ 、 $\overline{AB}$ 中點，

$$\text{所以 } \overline{OG} = \frac{1}{2}(4+6)=5, \quad \overline{CG} = \frac{1}{2} \times 24=12,$$

$$\text{則圓 } O \text{ 半徑} = \overline{OC} = \sqrt{\overline{OG}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\text{故圓 } O \text{ 的面積} = 13 \times 13 \times \pi = 169\pi。$$

2-2 ➡ 弧與圓周角

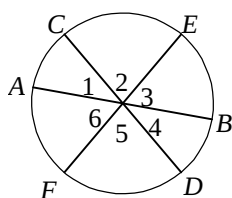
實力養成

重點 1 弦、弧、圓心角與圓周角

1. 在同一圓中，等弧對等弦，等弦對等弧。
2. 圓周角：
 - (1) 圓周角的度數等於其所對弧度數的一半。
 - (2) 同弧所對的圓周角度數是圓心角度數的一半。
 - (3) 半圓所對的圓周角都是 90° 。
3. 圓內接四邊形的對角互補。

題型 1 弧與圓心角的度數

如右圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ 皆為直徑， $\widehat{AC} = 2x^\circ$ ， $\widehat{CE} = 4x^\circ$ ， $\widehat{EB} = 3x^\circ$ ，

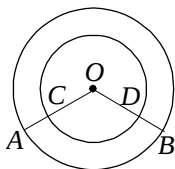


則：

- (1) $x =$ 20 。
- (2) $\angle 4 =$ 40 度。
- (3) $\angle 6 =$ 60 度。

題型 3 求弧的度數與長度

右圖兩同心圓的圓心為 O ， $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 為大圓的半徑， $\overline{OC}$ 、 $\overline{OD}$ 為小圓的半徑。若 $\angle AOB = 120^\circ$ ， $\overline{OA} = \overline{OB} = 9$ 公分， $\overline{OC} = \overline{OD} = 6$ 公分，則：



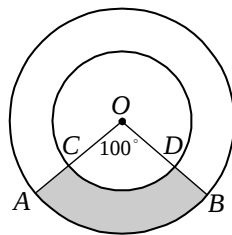
- (1) $\angle COD =$ 120 度。
- (2) $\widehat{AB} =$ 6π 公分， $\widehat{CD} =$ 4π 公分。

題型 2 求圓心角

已知 A 、 B 、 C 是圓 O 上相異三點，若 $\widehat{ACB}$ 的度數比 $\widehat{AB}$ 度數的 3 倍多 60° ，則 $\angle AOB =$ 75 度。

題型 4 求同心圓的部分面積

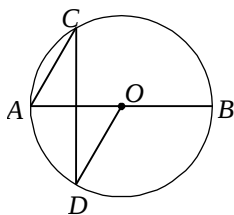
右圖兩同心圓的半徑 $\overline{OA} = 8$ 公分， $\overline{OC} = 5$ 公分，且 $\angle COD = 100^\circ$ ，則灰色部分面積為 $\frac{65\pi}{6}$ 平方公分。



題型 5

已知圓周角，求圓心角

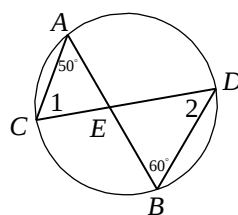
如右圖，圓 O 中，
若 $\overline{AB}$ 是直徑，且
 $\angle ACD = 30^\circ$ ，則
 $\angle DOB =$ 120 度。



題型 6

求圓周角

如右圖， $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$
是圓的兩弦，且相交
於 E 點。若 $\angle B = 60^\circ$ ，
 $\angle A = 50^\circ$ ，則：



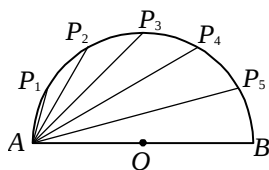
(1) $\angle 1 =$ 60 度。

(2) $\angle 2 =$ 50 度。

題型 7

半圓所對圓周角的應用

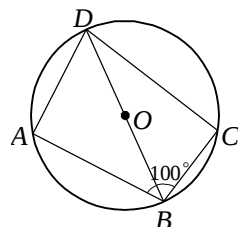
如右圖，將半徑為 5
的半圓分成六等分，
設等分點依次為 P_1 、
 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 ，則
 $\overline{AP_1}^2 + \overline{AP_2}^2 + \overline{AP_3}^2$
 $+ \overline{AP_4}^2 + \overline{AP_5}^2 =$ 250 。



題型 8

圓內接四邊形對角互補

如右圖，四邊形 $ABCD$
內接於圓 O 中，已知
 $\overline{BD}$ 為圓 O 的直徑，
且 $\angle ABC = 100^\circ$ ，則：



(1) $\angle A =$ 90 度。

(2) $\angle C =$ 90 度。

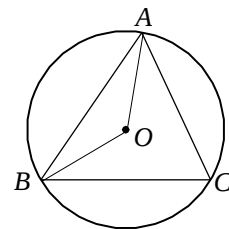
(3) $\angle ADC =$ 80 度。

強化練習

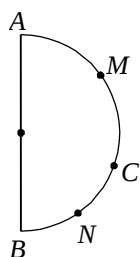
1. 圓 O 上有四點 A 、 B 、 C 、 D 依次分圓周為四部分。若 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{AD} = 2 : 1 : 3 : 4$ ，則 $\angle AOB + \angle COD =$ 180 度。

2. 若 $\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑， C 點在圓 O 上，且 $\widehat{AC} = 2\widehat{BC}$ ，則 $\angle BOC =$ 60 度。

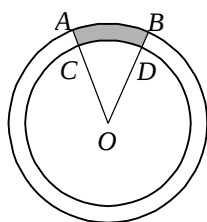
3. 如右圖， $\triangle ABC$ 為圓 O 的內接三角形。若 $\angle C = 65^\circ$ ，則 $\angle AOB =$ 130 度。



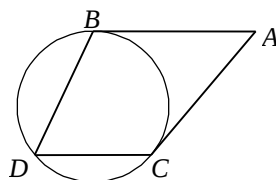
4. 如下圖(一)， $\overline{AB}$ 是半圓的直徑， C 為 $\widehat{AB}$ 上一點， M 為 $\widehat{AC}$ 的中點， N 為 $\widehat{BC}$ 的中點。若 $\overline{AB} = 12$ 公分，則 $\widehat{MCN}$ 的長為 3π 公分。



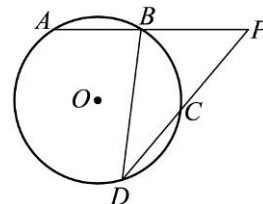
圖(一)



圖(二)



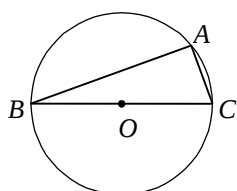
圖(三)



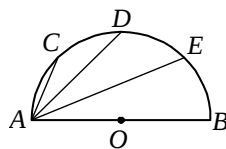
圖(四)

6. 如上圖(三)，自圓外一點 A 作圓的兩切線，切點分別為 B 、 C ， D 為圓上一點。若 $\angle BAC = 50^\circ$ ，則 $\angle BDC =$ 65 度。
7. 如上圖(四)，在圓 O 中，已知 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，弦 $\overline{AB}$ 與弦 $\overline{DC}$ 的延長線交於 P 點。若 $\angle ABD = 82.5^\circ$ ，則 $\angle P =$ 50 度。

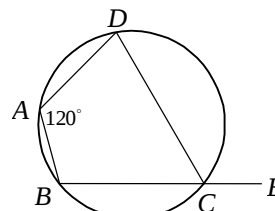
8. 如下圖(五)， $\triangle ABC$ 內接於一圓 O ，且 $\overline{BC}$ 為圓 O 的直徑。已知 $\angle B = 20^\circ$ ，則 $\angle C =$ 70 度。



圖(五)



圖(六)



圖(七)

10. 如上圖(七)，四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，且 $\overline{BC}$ 延長至 E 點。已知 $\angle A = 120^\circ$ ，則 $\angle BCD =$ 60 度， $\angle DCE =$ 120 度。

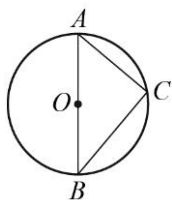
一、選擇題：每題 6 分，共 30 分

(C) 1. 如下圖(一)， $\overline{AB}$ 為直徑，則圓周角 $\angle ACB = ?$

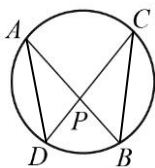
- (A)
- 50°
- (B)
- 60°
- (C)
- 90°
- (D)
- 120°

(A) 2. 如下圖(二)，已知 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 的弦，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點。若 $\angle BAD = 25^\circ$ ，則 $\angle PCB = ?$

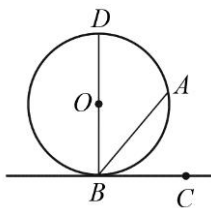
- (A)
- 25°
- (B)
- 30°
- (C)
- 35°
- (D)
- 40°



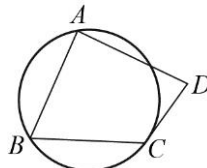
圖(一)



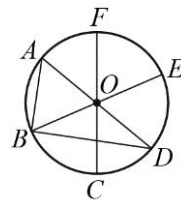
圖(二)



圖(三)



圖(四)



圖(五)

(B) 3. 如上圖(三)， $\overline{BD}$ 為圓 O 的直徑，且 $\overrightarrow{BC}$ 切圓 O 於 B 點。若 $\widehat{AD} = 80^\circ$ ，則 $\angle ABC = ?$

- (A)
- 40°
- (B)
- 50°
- (C)
- 60°
- (D)
- 80°

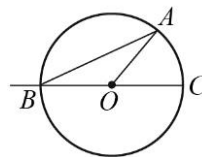
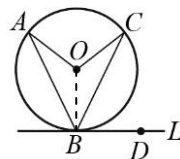
(C) 4. 如上圖(四)，四邊形 $ABCD$ 的頂點 A 、 B 、 C 都在圓周上，而 D 點在圓的外部，則 $\angle BAD$ 與 $\angle BCD$ 的和為何？

- (A) 等於
- 180°
- (B) 小於
- 180°
- (C) 大於
- 180°
- (D) 等於
- 360°

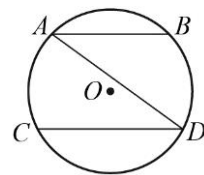
(A) 5. 如上圖(五)， A 、 B 、 D 三點共圓，且 $\overline{AD}$ 為直徑。若 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 也為直徑，且 $\widehat{AB} = 6x^\circ$ ， $\widehat{BC} = 70^\circ$ ， $\widehat{CD} = 5x^\circ$ ，則 $\widehat{DE} - \widehat{AF} = ?$

- (A)
- 10°
- (B)
- 20°
- (C)
- 30°
- (D)
- 40°

二、填充題：每格 6 分，共 60 分

1. 已知 A 、 B 、 C 是圓 O 上相異三點，若 $\widehat{ACB}$ 的度數比 $\widehat{AB}$ 度數的 4 倍多 30° ，則 $\widehat{AB}$ 所對的圓心角 $\angle AOB =$ 66 度。2. 如右圖，若 $\angle AOC = 50^\circ$ ，則 $\angle ABC$ 的外角 = 155 度。3. 如右圖，直線 L 與圓 O 相切於 B 點，且 A 、 B 、 C 三點將圓周長平均分成三等分，則： $\angle AOC =$ 120 度， $\angle CBO =$ 30 度， $\angle CBD =$ 60 度。

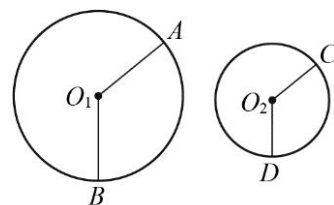
4. 如右圖，若 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 的弦，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\angle ADC = 35^\circ$ ，
則 $\widehat{BD} =$ 70 度。



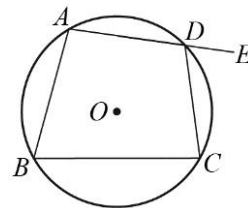
5. 已知圓 O 上有 A 、 B 、 C 、 D 四點，且依次分圓周成四部分。若 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{AD} = 2 : 1 : 3 : 4$ ，則 $\angle BOC + \angle AOD =$ 180 度。

6. 在半徑為 12 公分的圓 O 上，有 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 兩弧，它們所對的圓心角分別為 $\angle AOB = 30^\circ$ ， $\angle COD = 60^\circ$ ，則 $\widehat{CD}$ 比 $\widehat{AB}$ 長 2π 公分。

7. 如右圖，已知 $\widehat{AB} = 6\pi$ ，圓 O_1 、圓 O_2 的半徑分別為 8 和 5，且 $\angle AO_1B = \angle CO_2D$ ，則 $\widehat{CD} =$ $\frac{15}{4}\pi$ 。



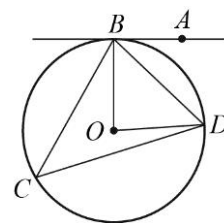
8. 如右圖， $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形。已知 $\angle EDC = 75^\circ$ ，則 $\angle B =$ 75 度。

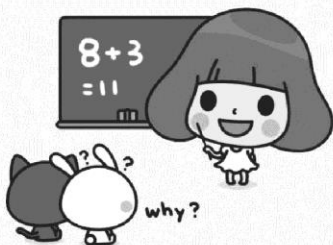


三、計算題：共 10 分

1. 如右圖， $\overline{BC}$ 為圓 O 的一弦， $\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 B 點。已知 $\angle ABD = 42^\circ$ ，試求 $\angle BOD$ 。

解： $\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 B 點 $\therefore \angle DBO = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$
 $\angle BOD = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ = 84^\circ$
答： 84°

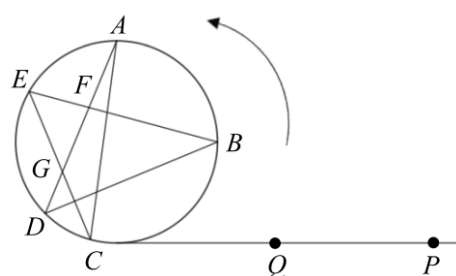




每週一題



魯班設計了一個圓盤如右圖，分別標記了 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五個點。若將此圓盤從 A 點在地面上滾動一圈回到 A 點，並將 A 、 B 、 C 、 D 、 E 與地板接觸的點標記為 P 、 Q 、 R 、 S 、 T 、 P' ，可測量出 $\overline{PQ} : \overline{QR} : \overline{RS} : \overline{ST} : \overline{TP'} = 6 : 7 : 2 : 5 : 4$ ，試回答下列問題：



- (1) $\angle EBD : \angle EBC$ 是多少？
- (2) $\angle EGD : \angle BFD$ 是多少？

解

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 依題意可知 } \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DE} : \widehat{AE} \\
 &= \overline{PQ} : \overline{QR} : \overline{RS} : \overline{ST} : \overline{TP'} \\
 &= 6 : 7 : 2 : 5 : 4
 \end{aligned}$$

$$\text{設 } \widehat{AB} = 6r, \widehat{BC} = 7r, \widehat{CD} = 2r, \widehat{DE} = 5r, \widehat{AE} = 4r, r \neq 0.$$

$$\text{則 } \angle EBD : \angle EBC = \frac{1}{2} \widehat{DE} : \frac{1}{2} \widehat{CDE} = \widehat{DE} : (\widehat{CD} + \widehat{DE}) = 5r : 7r = 5 : 7.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 由(1)可知, } \angle EGD : \angle BFD &= \frac{1}{2} (\widehat{DE} + \widehat{ABC}) : \frac{1}{2} (\widehat{AE} + \widehat{BCD}) \\
 &= (\widehat{DE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}) : (\widehat{AE} + \widehat{BC} + \widehat{CD}) \\
 &= (5r + 6r + 7r) : (4r + 7r + 2r) \\
 &= 18 : 13
 \end{aligned}$$

第 3 章 推理證明與三角形的心

3-1 ➡ 推理與證明

實力養成 重點 1 學習證明

- 證明的格式：
【已知】所給定的條件。
【求證】想得到的結論。
【證明】根據已知的事實及幾何性質推導出結論。
- 三角形的全等性質：SSS、SAS、ASA、AAS、RHS。

題型 1 全等性質的判斷 I

- 「兩個三角形中，若有兩角及其所夾的邊對應相等，則兩三角形全等。」這種性質稱為 ASA 全等性質。
- 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\angle A = \angle D$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，則 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SAS 全等性質)。

題型 3 滿足全等的條件

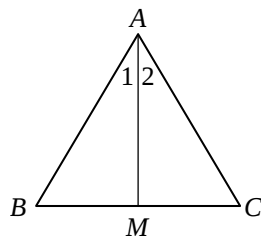
$\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，請問下列敘述何者錯誤？

- 使用 SAS 全等，應加條件 $\angle C = \angle F$ ，才能使兩個三角形全等
- 使用 SSS 全等，應加條件 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，才能使兩個三角形全等
- 使用 RHS 全等，應加條件 $\angle C = \angle F = 90^\circ$ ，才能使兩個三角形全等
- 使用 RHS 全等，應加條件 $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ，才能使兩個三角形全等

答：(A)。

題型 2 全等性質的判斷 II

右圖 $\triangle AMB$ 與 $\triangle AMC$ 中，已知 $\angle B = \angle C$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{AM} = \overline{AM}$ ，則 $\triangle AMB \cong \triangle AMC$ (AAS 全等性質)。

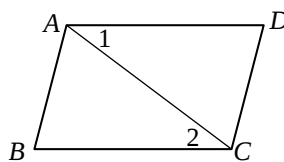


題型 4 學習證明 I

【已知】如右圖， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。

【求證】 $\angle B = \angle D$ 。

【證明】 $\because \overline{AD} = \overline{BC}$
 $\angle 1 = \angle 2$
 $\overline{AC} = \overline{AC}$ (公用邊)
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$
(SAS 全等性質)
 $\Rightarrow \angle B = \angle D$ (對應角相等)



題型 5

學習證明 II

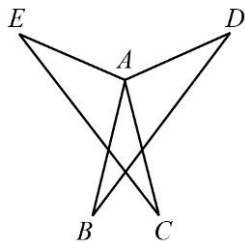
【已知】如右圖，

$$\angle B = \angle C,$$

$$\angle D = \angle E,$$

$$\overline{AD} = \overline{AE}。$$

【求證】 $\overline{AB} = \overline{AC}。$



【證明】在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ 中

$$\therefore \angle B = \underline{\angle C}$$

$$\angle D = \underline{\angle E}$$

$$\overline{AD} = \underline{\overline{AE}}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$$

(AAS 全等性質)

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} \text{ (對應邊相等)}$$

題型 7

相似形的應用

如右圖，A、B、

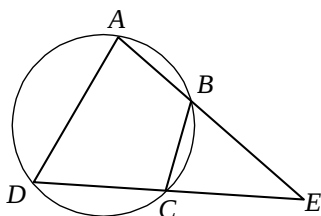
C、D 為圓上四

點，直線 AB、

DC 相交於 E。

已知 $\overline{AD} = 9$ ，

$\overline{BE} = 8$ ， $\overline{DE} = 15$ ，則 $\overline{BC} = \underline{\frac{24}{5}}$ 。



題型 6

學習證明 III

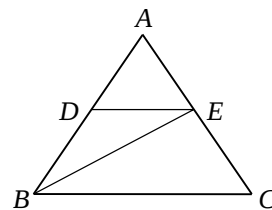
【已知】如右圖， $\overline{BE}$

為 $\angle ABC$ 的

角平分線，

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}。$$

【求證】 $\overline{DE} = \overline{BD}。$



【證明】 $\because \overline{BE}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線

$$\therefore \angle DBE = \underline{\angle CBE}$$

$$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \angle CBE = \underline{\angle DEB}$$

$$\text{故 } \angle DBE = \underline{\angle DEB}$$

$$\Rightarrow \overline{DE} = \overline{BD}$$

題型 8

代數推理證明 I

已知 a 、 b 、 c 為三個相異正整數，且

$(a+b+c)(a-b-c)=0$ ，試證 $b+c$ 可以整除 a^2 。

$$(a+b+c)(a-b-c)=0$$

$$\Rightarrow a^2 - (b+c)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = (b+c)^2$$

$\therefore b+c$ 為 a^2 的因數

故 $b+c$ 可以整除 a^2 。

題型 9

代數推理證明 II

已知 $a < 0$, $a + b > 0$, 試證 $|a| < |b|$ 。

$$a + b > 0 \Rightarrow b > -a$$

$$\text{又 } a < 0 \Rightarrow b > -a > 0$$

$$\Rightarrow |b| = b > -a = |a|$$

$$\text{故 } |a| < |b|。$$

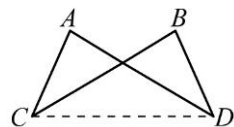
題型 10

利用輔助線作證明

【已知】如右圖，

$$\overline{AC} = \overline{BD},$$

$$\overline{AD} = \overline{BC}。$$



【求證】 $\angle A = \angle B$ 。

【證明】連接 $\overline{CD}$

在 $\triangle ACD$ 與 $\triangle BDC$ 中

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

$$\overline{CD} = \overline{CD} \text{ (公用邊)}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BDC$$

(SSS 全等性質)

$$\Rightarrow \angle A = \angle B \text{ (對應角相等)}$$

強化練習

1. 小苑發現 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中的 $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\angle B = \angle E$ 。她想用不同的全等性質來證明兩個三角形全等，請問下列哪一個是錯誤的？ 答：(D)。

(A) 如欲使用 SAS 全等，應加條件 $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，才能使兩個三角形全等

(B) 如欲使用 ASA 全等，應加條件 $\angle A = \angle D$ ，才能使兩個三角形全等

(C) 如欲使用 AAS 全等，應加條件 $\angle C = \angle F$ ，才能使兩個三角形全等

(D) 如欲使用 SSA 全等，應加條件 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，才能使兩個三角形全等

2. 【已知】如右圖， $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\angle 1 = \angle 2$ 。

【求證】 $\overline{BC} = \overline{DC}$ 。

【證明】在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中

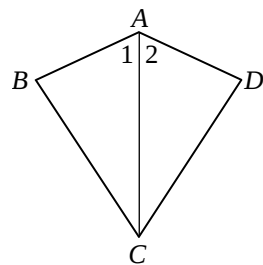
$$\therefore \overline{AB} = \overline{AD}$$

$$\angle 1 = \angle 2$$

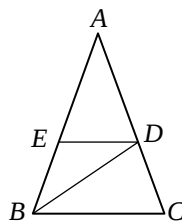
$$\overline{AC} = \overline{AC} \text{ (公用邊)}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC \text{ (SAS 全等性質)}$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \overline{DC} \text{ (對應邊相等)}$$



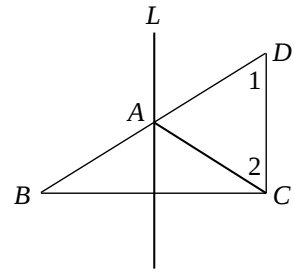
3. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm， $\angle ABC$ 的角平分線 $\overline{BD}$ 交 $\overline{AC}$ 於 D 點，過 D 點作 $\overline{DE}$ 平行 $\overline{BC}$ 。若 $\overline{DE} = 4$ cm，則 $\triangle ADE$ 的周長為 16 cm。



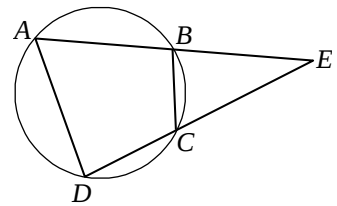
4. 【已知】如右圖， L 為 $\overline{BC}$ 的垂直平分線，直線 L 交 $\overline{BD}$ 於 A ，
且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 。

【求證】 $\angle 1 = \angle 2$ 。

【證明】 $\because L$ 為 $\overline{BC}$ 的垂直平分線 $\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$
又 $\overline{AB} = \overline{AD}$ $\therefore \overline{AC} = \overline{AD}$
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (等腰 三角形的兩底角相等)

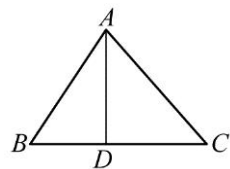


5. 如右圖， A 、 B 、 C 、 D 為圓上四點，直線 AB 與直線 DC 相交於圓外一點 E 。若 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{BE} = 4$ ， $\overline{DE} = 7$ ，則
 $\overline{BC} = \underline{\frac{16}{7}}$ 。

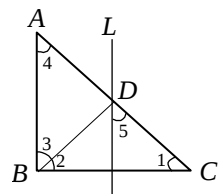


6. 已知 $a < 0$ ， $a + b > 0$ ， $b + c < 0$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為 $\underline{b > a > c}$ 。

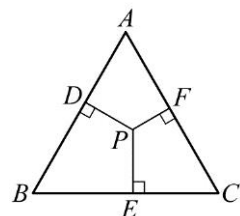
7. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = \sqrt{13}$ ， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{BD} = 2$ ，
 $\overline{AD} = 3$ ，則 $\overline{CD} = \underline{\sqrt{7}}$ 。



8. 如右圖，直線 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，且 $\angle ABC = 90^\circ$ 。
若 $\overline{DA} = \overline{DC}$ ，則下列何者 不一定 成立？ 答： (C)。
(A) $\angle 1 = \angle 2$ (B) $\angle 3 = \angle 4$
(C) $\angle 2 = \angle 5$ (D) $\angle 4 = \angle 5$



9. 如右圖， P 為正 $\triangle ABC$ 內部的一點，且 $\overline{PE} \perp \overline{BC}$ ，
 $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PF} \perp \overline{AC}$ 。若 $\overline{AB} = 10$ ，則 $\overline{PD} +$
 $\overline{PE} + \overline{PF} = \underline{5\sqrt{3}}$ 。



一、選擇題：每題 5 分，共 25 分

(C) 1. $\triangle ABC$ 中， E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點。若 $\overline{AB} > \overline{AC}$ ，則下列敘述何者錯誤？

- (A) $\overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ (B) $\overline{AF} = \overline{CF}$ (C) $\overline{BE} = \overline{CF}$ (D) $\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

(C) 2. 下列敘述共有幾個是正確的？

(甲) 直角三角形中，斜邊長的平方等於兩股平方和

(乙) 任意三角形的內角和為 180°

(丙) 箏形的對角線互相平分

(丁) 平行四邊形的對角線互相平分

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(B) 3. 下列敘述何者正確？

(A) 菱形的兩條對角線互相平分；反之，兩條對角線互相平分就是菱形

(B) 矩形的四個角為 90° ；反之，四個角為 90° 的就是矩形

(C) 正方形的四邊等長；反之，四邊等長就是正方形

(D) 正三角形的三個角皆是銳角；反之，三個角皆是銳角的就是正三角形

(D) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是正三角形。若 $\angle BAE = 28^\circ$ ，則 $\angle EDC = ?$

(A) 18°

(B) 36°

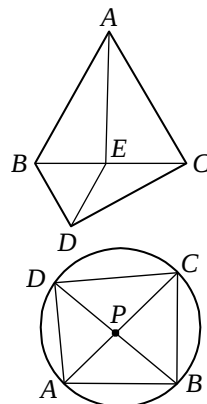
(C) 54°

(D) 32°

(A) 5. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，且其對角線交於 P 點，下列何者與 $\triangle ABP$ 相似？

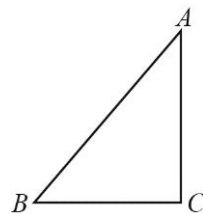
(A) $\triangle DCP$ (B) $\triangle ADP$

(C) $\triangle BPC$ (D) $\triangle ABC$



二、填充題：每格 5 分，共 65 分

1. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ ，且 $\angle A = 40^\circ$ ，則 $\angle B =$ 50 度。

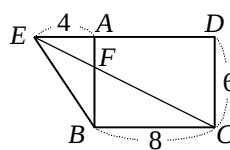


2. 一等腰三角形的周長為 18 cm，底邊上的高為 3 cm，則此三角形的面積為 12 cm^2 。

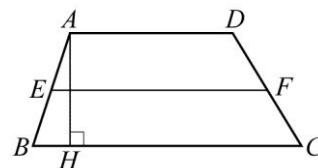
3. 若一直角三角形的三邊長呈現等差數列，則當斜邊為 10 時，此三角形的周長為 24。

4. 右圖(一)四邊形 $ABCD$ 為矩形， $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ ， $\overline{CD} = 6 \text{ cm}$ ， $\overline{AE} = 4 \text{ cm}$ ，則：

- (1) $\overline{AF} = \underline{2} \text{ cm}$ 。
 (2) $\triangle BEF$ 面積 = $\underline{8} \text{ cm}^2$ 。



圖(一)



圖(二)

5. 如上圖(二)，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{EF}$ 為梯形兩腰中點連線段。若 $\overline{EF} = 2 \overline{AH} = 40$ ，則梯形 $ABCD$ 面積 = $\underline{800}$ 。

6. 已知：如右圖， $\overline{BC}$ 平分 $\angle ABD$ ， $\overline{AB} = \overline{BD}$ 。

求證： $\overline{AC} = \overline{DC}$ 。

證明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 中

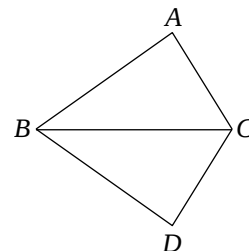
$$\because \overline{AB} = \overline{BD} \quad (\text{已知})$$

$$\angle \underline{ABC} = \angle \underline{DBC} \quad (\text{已知})$$

$$\overline{BC} = \overline{BC} \quad (\text{公用邊})$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBC$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{DC} \quad (\underline{SAS} \text{ 全等性質})$$

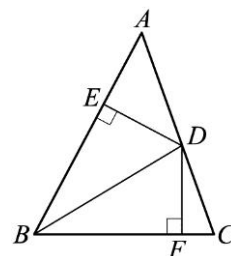


7. 根據下面的敘述，分別寫出已知與求證：

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ ，則 $\overline{DE} = \overline{DF}$ 。

已知： $\underline{\triangle ABC \text{ 中，} \overline{BD} \text{ 平分 } \angle ABC}$ 。

求證： $\underline{\overline{DE} = \overline{DF}}$ 。



三、計算題：每題 5 分，共 10 分

1. 已知：如右圖， $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = 2 \overline{DF}$ ， $\angle B = \angle D$ 。
 求證： $\overline{AB} = 2 \overline{DE}$ 。

證： $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$

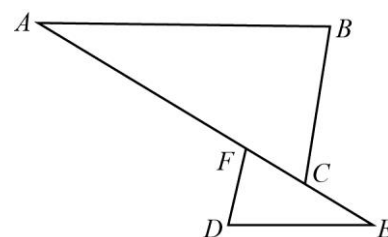
$$\therefore \angle A = \angle E \quad (\text{內錯角相等})$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDF$ 中

$$\because \angle A = \angle E, \angle B = \angle D$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EDF \quad (\text{AA 相似性質})$$

$$\text{又 } \overline{BC} = 2 \overline{DF}, \text{ 故 } \overline{AB} = 2 \overline{DE} \quad (\text{對應邊成比例})$$



2. 已知 n 為正整數，試證 $n(n+1)$ 為偶數。

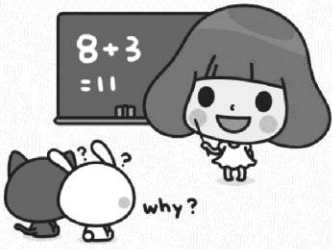
證： $\because n$ 為正整數

$\therefore n$ 可為偶數或奇數

(1) 當 n 為偶數時， $n+1$ 為奇數，則 $n(n+1) = \text{偶} \times \text{奇}$ ，為偶數。

(2) 當 n 為奇數時， $n+1$ 為偶數，則 $n(n+1) = \text{奇} \times \text{偶}$ ，為偶數。

故 $n(n+1)$ 為偶數。



每週一題



如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle DAB = \angle DBA$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，且 $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ，試說明：

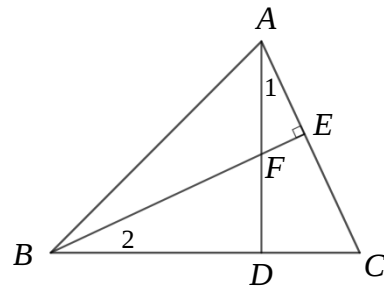
- (1) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。
- (2) $\overline{CD} = \overline{DF}$ 。

解

(2) 由圖可知， $\angle AFE = \angle BFD$ （對頂角相等），又 $\angle 1 = \angle 2$ ，
故 $\angle 1 + \angle AFE = 90^\circ = \angle 2 + \angle BFD$ ，
因此 $\angle BDF = \angle AEF = 90^\circ$ ，
即 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。

(3) $\because \angle DAB = \angle DBA$
 $\therefore \triangle ADB$ 是等腰三角形，得 $\overline{DA} = \overline{DB}$
在 $\triangle ADC$ 與 $\triangle BDF$ 中，
因為 $\angle ADC = \angle BDF = 90^\circ$ ，
 $\angle 1 = \angle 2$ ，
 $\overline{DA} = \overline{DB}$ ，

所以 $\triangle ADC \cong \triangle BDF$ （ASA 全等性質）。
因此 $\overline{CD} = \overline{DF}$ （對應邊相等）。



3-2 ➡ 三角形的外心、內心與重心

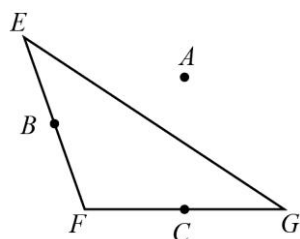
實力養成 重點 1 外心

1. 三角形三邊的中垂線交於同一點，此點為三角形的外心。
2. 三角形的外心到三頂點的距離相等。
3. 以外心為圓心，外心到頂點的距離為半徑，可畫出三角形的外接圓。
4. 銳角三角形的外心在三角形的內部。
5. 鈍角三角形的外心在三角形的外部。
6. 直角三角形的外心必在斜邊中點上，外接圓半徑 $= \frac{1}{2} \times (\text{斜邊長})$ 。

題型 1 判斷外心位置

如右圖， $\triangle EFG$ 的外心可能是 A 、 B 、 C 三點中的哪一點？

答： A 。



題型 2 外心的位置與性質判斷

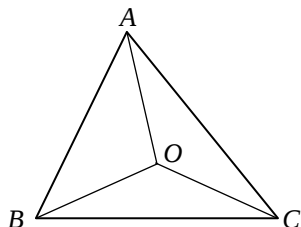
下列關於外心的敘述，何者錯誤？

- (A) 直角三角形的外心在斜邊中點上
 (B) 鈍角三角形的外心在三角形內部
 (C) 外心與三角形的三頂點等距離
 (D) 外心是三角形三中垂線的交點

答： (B) 。

題型 3 求外心到頂點的距離

如右圖， O 為 $\triangle ABC$ 的外心。若 $\overline{OA} = 5$ 公分，則 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} =$ 15 公分。



題型 4 外心到頂點距離的應用

直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 。若外心 O 到 A 、 B 、 C 三點的距離和為 21 公分，則 $\overline{AB} =$ 14 公分。

題型 5 直角三角形的外接圓半徑

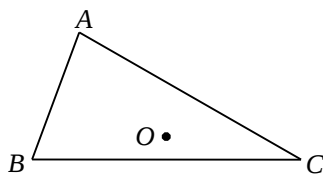
$\triangle ABC$ 中，已知三邊長分別為 7、24、25，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 $=$ $\frac{25}{2}$ 。

題型 6 等腰三角形的外接圓半徑

- (1) 若銳角 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，且 O 為外心， $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 $=$ $\frac{25}{8}$ 。
- (2) 若鈍角 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，且 O 為外心， $\overline{AB} = \overline{AC} = 25$ ， $\overline{BC} = 14$ ，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 $=$ $\frac{625}{48}$ 。

題型 7 求外心角度 I

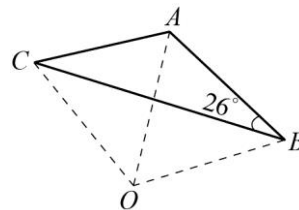
右圖 $\triangle ABC$ 中，
 $\angle A = 80^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，
 O 為外心，求：



- (1) $\angle AOB =$ 60 度。
- (2) $\angle BOC =$ 160 度。
- (3) $\angle COA =$ 140 度。

題型 8 求外心角度 II

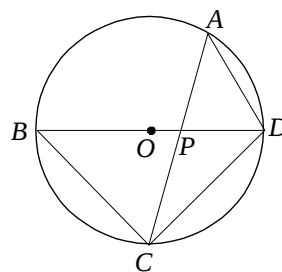
右圖 $\triangle ABC$ 中，
 O 為 $\triangle ABC$ 的外心。若
 $\angle ABC = 26^\circ$ ，則
 $\angle CAO =$ 64 度。



強化練習

1. 若圓 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圓，且圓心 O 在 $\overline{AC}$ 上，則下列何者不正確？ 答： (D)。
 (A) $\triangle ABC$ 必為直角三角形 (B) $\widehat{ABC} = 180^\circ$
 (C) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ (D) $\angle C = 90^\circ$

2. 如右圖， $\overline{BD}$ 為圓 O 的直徑，弦 $\overline{AC}$ 未過圓心 O ，則下列哪一個敘述是正確的？ 答： (C)。
 (A) O 是 $\triangle PCD$ 的外心 (B) O 是 $\triangle APD$ 的外心
 (C) O 是 $\triangle ACD$ 的外心 (D) O 是 $\triangle BCP$ 的外心

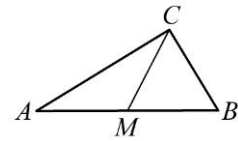


3. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為6公分、8公分、10公分。若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則
 $\overline{OA} : \overline{OB} : \overline{OC} =$ 1 : 1 : 1。

4. (1) 如果一直角三角形的兩股長分別為5公分、12公分，那麼其外心到各頂點的距離和為
19.5公分。

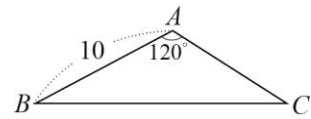
- (2) 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ 。若 $\overline{AB} = 10$ 公分， $\overline{AC} = 24$ 公分，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為
13公分。

5. 如右圖， $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 5$ 。若 $\overline{BC} = 6$ ，
則 $\triangle ABC$ 的面積為 24。



6. 已知一等腰直角三角形的外接圓半徑為 6 公分，則此直角三角形的面積為 36 平方公分。

7. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。
若 $\angle A = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ，則 $\triangle ABC$ 的外心到 $\overline{BC}$
的距離為 5。



8. (1) 設 O 為銳角 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle BOC = 100^\circ$ ，則 $\angle A =$ 50 度。

- (2) $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$ ，且 O 為外心，則 $\angle AOC =$ 108 度。

9. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$ ，則下列敘述何者正確？

(A) $\angle BOC = 120^\circ$ (B) $\angle AOB = 150^\circ$ (C) $\angle AOC = 60^\circ$

答： (B) 。

10. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心為 O ，又 $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，則 $\angle BOC =$ 140 度。

11. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle BOC = 160^\circ$ ，則 $\angle BAC =$ 80 或 100 度。(有兩個答案)

實力養成 重點 2 內心

1. 三角形的三內角平分線交於同一點，此點為三角形的內心。
2. 三角形的內心到三邊的距離相等。
3. 以內心為圓心，內心到邊的距離為半徑，可在三角形內部畫出一個和三邊相切的內切圓。
4. 三角形面積 $= \frac{1}{2} \times (\text{三角形周長}) \times (\text{三角形內切圓半徑})$ 。
5. 直角三角形的內切圓半徑 $= \frac{1}{2} \times (\text{兩股和一斜邊長})$ 。

題型 1 判斷三角形的內心位置

若某三角形的內心在該三角形的內部，則此三角形為何種三角形？

- (A) 必為銳角三角形
(B) 必為直角三角形
(C) 必為鈍角三角形
(D) 以上皆有可能

答：(D)。

題型 3 利用內切圓半徑求面積 I

$\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ 。

若 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\triangle AIB$ 面積：

$\triangle AIC$ 面積： $\triangle BIC$ 面積 $= 2 : \sqrt{3} : 1$ 。

題型 5 求等腰三角形的內切圓半徑

已知 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ， I 為內心，則 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 $= \frac{3}{2}$ 。

題型 2 求內切圓半徑

已知 O 為 $\triangle ABC$ 的內心，且 $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ 於 M 點。若 $\triangle ABC$ 面積為 9 平方公分，且 $\overline{AB} = 7$ 公分， $\overline{AC} = 5$ 公分， $\overline{BC} = 6$ 公分，則 $\overline{OM} = 1$ 公分。

題型 4 利用內切圓半徑求面積 II

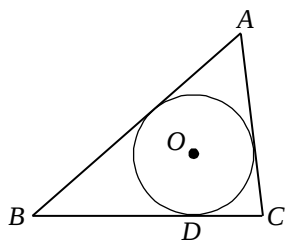
設 $\triangle ABC$ 的周長為 24 公分，內切圓半徑為 2 公分，則 $\triangle ABC$ 面積 $= 24$ 平方公分。

題型 6 求直角三角形的內切圓半徑

已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ， r 為內切圓半徑。若 $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{BC} = 16$ ，則 $r = 4$ 。

題型 7 內切圓的應用

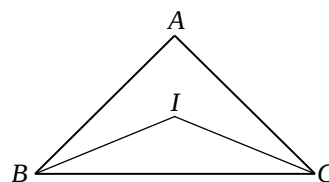
如右圖，圓 O 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，
 $\overline{BC}$ 切圓 O 於 D 。
 若 $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{AC} = 4$ ，
 $\overline{AB} = 6$ ，則 $\overline{BD} =$
3.5。



題型 8 求內心角度 I

如右圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\angle A = 90^\circ$ ，
 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則：

(1) $\angle IBC =$
22.5 度。



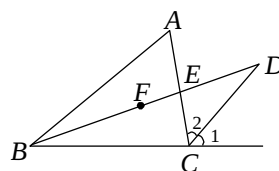
(2) $\angle BIC =$ 135 度。

題型 9 求內心角度 II

在 $\triangle ABC$ 中，已知 O 為 $\triangle ABC$ 的內心，且
 $\angle A = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{3} \angle C$ ，則 $\angle BOC =$ 105 度。

題型 10 內心的應用

如右圖，已知 F 為 $\triangle ABC$ 的內心。
 若 $\angle 1 = \angle 2$ ，
 且 $\angle A = 60^\circ$ ，
 則 $\angle D =$ 30 度。



強化練習

1. 已知 O 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{OL} \perp \overline{AB}$ 於 L 點， $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ 於 M 點， $\overline{ON} \perp \overline{AC}$ 於 N 點。
 若 $\overline{OM} = 2$ 公分，則 $\overline{OL} + \overline{OM} + \overline{ON} =$ 6 公分。

2. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 2 : 1$ ，且 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\triangle AIB : \triangle BIC : \triangle CIA$ 的面積比為 $1 : 2 : \sqrt{3}$ 。

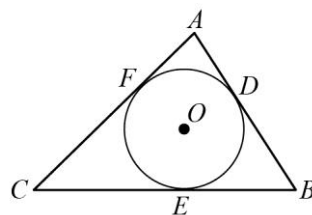
3. (1) 已知一個三角形的周長為 32 公分，面積為 48 平方公分，則其內切圓的半徑為
3 公分。

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的周長是 20 cm，面積是 15 cm^2 ，則其內切圓的直徑 = 3 cm。

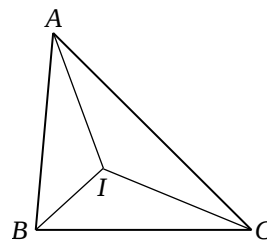
4. 已知 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 25$ ， $\overline{BC} = 14$ ，則 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑＝ $\frac{21}{4}$ 。

5. 一個直角三角形的三邊長分別為 6 公分、8 公分、10 公分，則此直角三角形的內切圓周長為 4π 公分。

6. 如右圖，已知圓 O 為 $\triangle ABC$ 的內切圓， D 、 E 、 F 為切點。
設 $\overline{AD} = 2$ 公分， $\overline{BE} = 3$ 公分， $\overline{CF} = 4$ 公分，則 $\triangle ABC$ 的周長為18公分。



7. 如右圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\angle CAI = 25^\circ$ ，則：
(1) $\angle ABC + \angle ACB =$ 130 度。

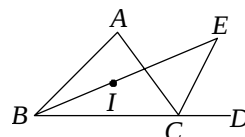


(2) $\angle BIC =$ 115 度。

8. (1) 已知 I 為 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心，且 $\angle A = 90^\circ$ ，則 $\angle BIC =$ 135 度。

(2) $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 102^\circ$ ，且 $\angle ABC$ 與 $\angle ACB$ 的角平分線相交於 I 點，則 $\angle BIC =$ 141 度。

9. 如右圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{CE}$ 平分 $\angle ACD$ ，且 B 、 I 、 E 三點共線。已知 $\angle BEC = 40^\circ$ ，則 $\angle A =$ 80 度。

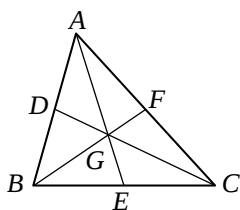


1. 三角形的三中線必交於同一點，此點為三角形的重心。
2. 重心到一頂點的距離等於它到對邊中點距離的 2 倍。
3. 重心與三頂點的連線將三角形面積三等分，三中線將三角形面積六等分。

題型 1 利用重心求長度 I

如右圖， $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CD}$ 為 $\triangle ABC$ 的三中線。

若 $\overline{AG} = 5$ ， $\overline{FG} = 2$ ， $\overline{DG} = 3$ ，則 $\overline{AE} + \overline{BF} + \overline{CD} =$ 22.5。

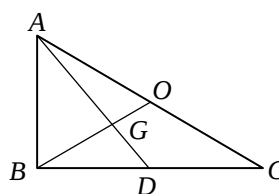


題型 2 利用重心求長度 II

如右圖， G 為直角 $\triangle ABC$ 的重心， O 為斜邊 $\overline{AC}$ 的中點， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 12$ ，則：

(1) $\overline{GO} =$ 2。

(2) $\overline{AG} =$ $2\sqrt{7}$ 。



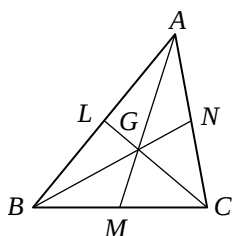
題型 3 面積等分 I

如右圖， G 是 $\triangle ABC$ 的重心。若 $\triangle GBM$ 的面積是 8，則：

(1) $\triangle ACG$ 面積 = 16。

(2) $\triangle ABC$ 面積 = 48。

(3) 四邊形 $BMGL$ 面積 = 16。

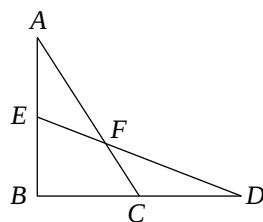


題型 4 面積等分 II

如右圖， E 、 C 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BD}$ 的中點。

(1) 若 $\overline{DE} = 15$ ，則 $\overline{EF} =$ 5。

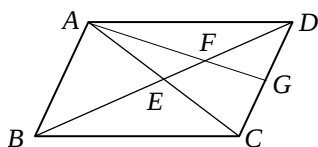
(2) 若 $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BD} = 12$ ，則 $\triangle AEF$ 面積 = 10。



題型 5 面積等分 III

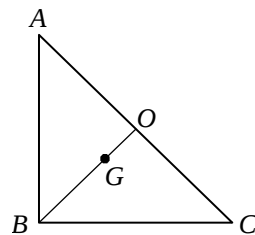
如右圖，若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 60 cm^2 ，

$\overline{BD} = 12 \text{ cm}$ ，且 $\overline{DG} = \overline{GC}$ ，則 $\triangle AEF$ 面積 = 5 cm^2 ， $\overline{EF} =$ 2 cm 。



題型 6 利用重心求斜邊

右圖直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， O 為斜邊的中點， G 為重心。若 $\overline{GO} = 10$ 公分，則 $\overline{AC} =$ 60 公分。

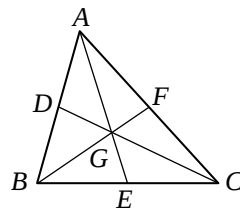


強化練習

1. 如右圖， G 為 $\triangle ABC$ 的重心。

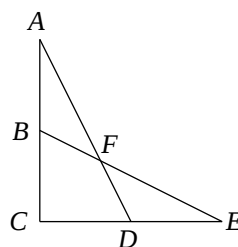
(1) 若 $\overline{AG} = 6$ ，則 $\overline{AE} =$ 9。

(2) 若 $\overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} = 8$ ，則 $\triangle ABC$ 三中線長的和 = 24。



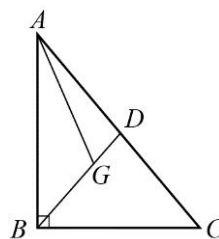
2. 如右圖，已知 $\overline{AC} \perp \overline{CE}$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\overline{CD} = \overline{DE}$ 。

若 $\overline{AC} = \overline{CE} = 10$ 公分，則 $\overline{DF} =$ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ 公分。

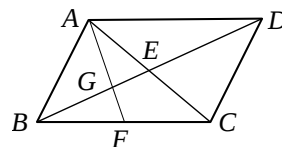


3. 如右圖， G 為直角 $\triangle ABC$ 的重心， $\angle ABC = 90^\circ$ 。

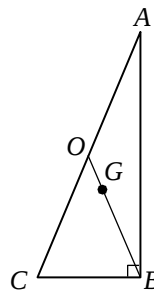
若 $\overline{AB} = 8$ 公分， $\overline{BC} = 6$ 公分，則 $\triangle AGD$ 的面積為 4 平方公分。



4. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 的兩對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 E 點， F 是 $\overline{BC}$ 中點，且 $\overline{AF}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 G 點，則 $\triangle AGB$ 面積： $\triangle ECD$ 面積 = 2 : 3。

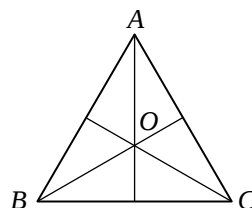


5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{BC} = 10$ ， G 是 $\triangle ABC$ 的重心， O 是 $\triangle ABC$ 的斜邊的中點，則 $\overline{GO} =$ $\frac{13}{3}$ 。



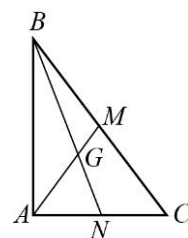
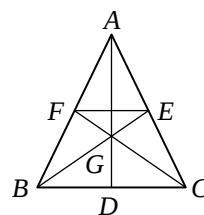
6. 設 G 為正 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\overline{AG} = 6$ 公分，則 $\triangle ABC$ 的周長為 $18\sqrt{3}$ 公分。

7. 如右圖，若 O 為正 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\overline{OA} = 4$ 公分，則 $\triangle ABC$ 的面積為 $12\sqrt{3}$ 平方公分。



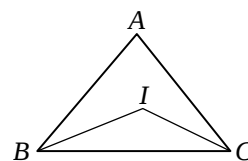
一、選擇題：每題 5 分，共 25 分

- (D) 1. 下列哪一個是外心？
 (A) 三角形三高的交點
 (B) 三角形三內角平分線的交點
 (C) 三角形三中線的交點
 (D) 三角形三邊垂直平分線的交點
- (D) 2. 若 G 是正 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\triangle ABC$ 的邊長為 18，則 $\overline{CG} = ?$
 (A) 3 (B) $3\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $6\sqrt{3}$
- (B) 3. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 的三條中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 G 點。
 若 $\overline{AD} = 12$ cm，則 $\overline{AG}$ 為多少 cm？
 (A) 12
 (B) 8
 (C) 6
 (D) 4
- (C) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ，兩中線 $\overline{AM}$ 與 $\overline{BN}$ 交於 G 點。若 $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AC} = 7$ ，則下列何者錯誤？
 (A) $\overline{BC} = 25$
 (B) $\triangle ABG$ 面積 = 28
 (C) $\overline{AG} = \frac{50}{3}$
 (D) $\triangle AGN$ 面積 = 14
- (D) 5. 已知 O 點是 $\triangle ABC$ 的外心， $\angle BOC = 80^\circ$ ，則 $\angle BAC = ?$
 (A) 40°
 (B) 100°
 (C) 160° 或 50°
 (D) 140° 或 40°



二、填充題：每格 5 分，共 65 分

1. 如右圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心。若 $\angle ABC + \angle ACB = 100^\circ$ ，
 則 $\angle BIC =$ 130 度。
2. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心。若 $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 5 : 11$ ，則 $\angle AOB =$ 162 度。
3. $\triangle ABC$ 中，已知 I 為內心， $\angle BIC = 110^\circ$ ，則 $\angle A =$ 40 度。
4. 若等腰直角 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為 64π 平方公分，則 $\triangle ABC$ 的面積為 64 平方公分。



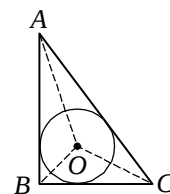
5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ，且圓 O 為 $\triangle ABC$ 的內切圓。

若 $\overline{AB}=8\text{ cm}$ ， $\overline{BC}=6\text{ cm}$ ，則：

(1) $\triangle ABC$ 面積 = 24 cm^2 。

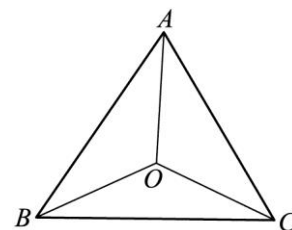
(2) 圓 O 半徑 = 2 cm 。

(3) $\triangle AOB$ 面積： $\triangle BOC$ 面積： $\triangle AOC$ 面積 = 4:3:5。



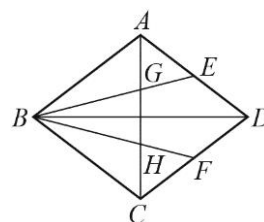
6. 若正 $\triangle ABC$ 的內切圓面積為 9π 平方公分，則 $\triangle ABC$ 的高為 9 公分，其外接圓面積為 36π 平方公分。

7. 如右圖，設 O 點是 $\triangle ABC$ 的外心。若 $\angle ACB=60^\circ$ ， $\angle ABC=55^\circ$ ，則 $\angle BOC=$ 130 度。

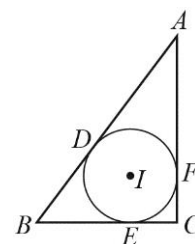


8. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=\overline{AC}=26$ ， $\overline{BC}=20$ ，則其內切圓半徑 = $\frac{20}{3}$ 。

9. 如右圖(一)，菱形 $ABCD$ 中， E 、 F 兩點分別是 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點。若 $\overline{AG}=4$ ， $\overline{BD}=16$ ，則四邊形 $BFDE$ 的面積 = 48。



圖(一)



圖(二)

10. 如右圖(二)， I 為直角 $\triangle ABC$ 的內心， $\angle C=90^\circ$ ， D 、 E 、 F 為內切圓與三邊的切點。若 $\overline{AD}=6$ ， $\overline{BE}=4$ ，則其內切圓半徑 = 2。

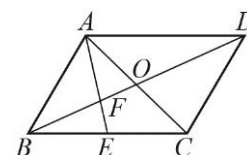
三、計算題：每題 5 分，共 10 分

1. 如右圖， $\square ABCD$ 中， E 為 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BD}$ 相交於 F 點。若 $\triangle BEF$ 的面積為 6，則 $\triangle ABF$ 的面積 = ?

解：因 F 為 $\triangle ABC$ 的重心

故 $\triangle ABF$ 的面積 = $2\triangle BEF$ 的面積 = 12

答：12

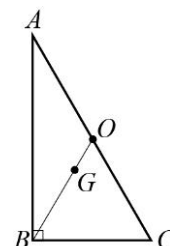


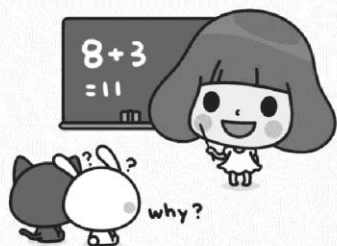
2. 若 O 、 G 分別為直角 $\triangle ABC$ 的外心及重心，且 $\angle B=90^\circ$ ， $\overline{AC}=14$ ，則 $\overline{OG}=?$

解： O 為 $\overline{AC}$ 的中點， G 為直角 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\overline{OG} = \frac{1}{3} \overline{BO} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{6} \overline{AC} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

答： $\frac{7}{3}$





每週一題



忠勇是一位戰技頂尖的特戰隊員，尤其是跳傘更是拿手項目之一，某日，乘坐運輸機準備進行跳傘訓練，接到了來自地面的訊息，訊息如下：

目標區域：地面上紅色標記點為頂點，所構成的三角形區域範圍內。

坐標為：東經 6 度 北緯 8 度

東經 30 度 北緯 8 度

東經 6 度 北緯 26 度

- (1) 請判別此三角形為何種三角形？
- (2) 忠勇接收到消息後，立即向地面的訓練單位表示，此範圍過大容易遭受到敵方攻擊，請儘速將範圍縮至內切圓內，以躲避攻擊。試問此內切圓面積為何？

解

- (1) 將三點以坐標形式表示為 $A(6, 8)$ 、 $B(30, 8)$ 、 $C(6, 26)$ 。

三邊長分別為 18、24、30，又因為 $18^2 + 24^2 = 30^2$ ，

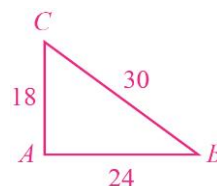
所以此 $\triangle ABC$ 為直角三角形。

- (2) 由(1)可知三邊長分別為 18、24、30，

內切圓半徑 $= \frac{1}{2} \times (\text{兩股和} - \text{斜邊長})$

$$= \frac{1}{2} \times (18 + 24 - 30) = 6$$

內切圓面積 $= 6 \times 6 \times \pi = 36\pi$ 。



第五冊

第 1 章 比例線段與相似形

1-1 連比

1 實力養成重點 1

題型① $1.6、\frac{4}{3}；2.24、2$

題型② $1.50、30、20；2.(1)18：16：15、(2)19：15$

題型③ $\frac{6}{11}$

題型④ $2：1：3$

題型⑤ $(1)2：3：2；(2)4：2：5$

題型⑥ $1.35：16：30；2.6：4：3$

2 題型⑦ $1.9：15：20；2.16、20、24$

題型⑧ $540、900、360$

● 強化練習

1. $(1)\frac{5}{3}、\frac{24}{5}；(2)\frac{15}{4}、\frac{16}{5}$

2. $(1)5：6：4；(2)4：7：5；(3)28：6：21$

3. $12：20：35$ 4. $45、45、30$

5. $\frac{26}{3}$ 6. $20：15：12$ 7. $(1)\frac{16}{9}；(2)\frac{7}{30}$

8. $4,000,000、6,000,000、8,000,000$

9. $3：2：5$ 10. $90、60$

11. $20、30$

3 隨堂基礎卷

一、選擇題

1.B 2.D 3.D 4.C 5.D

二、填充題

1. $(1)5：4：6；(2)21：6：7$

2. $(1)\frac{1}{3}；(2)\frac{13}{2}；(3)\frac{16}{27}；$

3. $(1)12：8：9；(2)36$

4. $4：3：2；$ 4 5. $\frac{33}{4}$ 6.15

7. $15：21：10$ 8. 直角 9. 93

三、計算題

1. 設三邊長為 $4k$ 公分、 $3k$ 公分、 $5k$ 公分， $k \neq 0$ ，

$4k+3k+5k=84$ ， $12k=84$ ， $k=7$ ，

三邊長分別為 28 公分、 21 公分、 35 公分。

答： 28 公分、 21 公分、 35 公分

2. 設大寶有 a 元，二寶有 b 元，小寶有 c 元，
則 $3a=4b$ ， $4b=5c$ ， $a：b：c=20：15：12$ 。

設 $a=20k$ ， $b=15k$ ， $c=12k$ ， $k \neq 0$ ，

則 $20k+15k+12k=940$ ， $47k=940$ ， $k=20$ ，

故大寶有 400 元，二寶有 300 元，小寶有 240 元

答：大寶 400 元，二寶 300 元，小寶 240 元

5 每週一題

(1) 設 $A、B、C$ 三種糖果的價格分別為 $6r$ 元、 $5r$ 元、 $3r$ 元， $r \neq 0$ ，

小文購買 $A、B、C$ 三種糖果的重量分別為 m 公克、 $3m$ 公克、 $2m$ 公克， $m \neq 0$ ，

則小文購買 $A、B、C$ 所花的費用比為

$6r \times m：5r \times 3m：3r \times 2m=2：5：2$ 。

(2) 設阿茂購買 $A、B、C$ 三種糖果的重量分別為 $100x$ 公克、 $100y$ 公克、 $100z$ 公克，由題意可知

$$\begin{cases} 100x+100y+100z=1000 \cdots \cdots ① \\ 30x+25y+15z=250 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100x+100y+100z=1000 \cdots \cdots ① \\ 30x+25y+15z=250 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$\text{①化簡後得 } x+y+z=10 \cdots \cdots ③$$

$$\text{②化簡後得 } 6x+5y+3z=50 \cdots \cdots ④$$

$$\text{④}-③ \times 3，得 } 3x+2y=20，$$

$$\text{符合上式的解有 } \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=7 \\ z=1 \end{cases}，$$

則阿茂所買糖果的重量比 $100x：100y：100z$

$=x：y：z$ 為 $6：1：3、2：2：1$ 或 $2：7：1$ 。

1-2 比例線段

6 實力養成重點 1

題型① $6、4$

題型② $\frac{4}{9}$

● 強化練習

1. $(1)35；(2)20$

2. $\frac{12}{35}$

7 實力養成重點 2

題型① 4

題型② 9

題型③ $\frac{10}{3}$

題型④ 2

8 題型⑤ 12

題型⑥ $\frac{7}{2}、\frac{35}{6}$

題型⑦ $(1)8、4；(2)2、5$

題型⑧ $9：64$

題型⑨ 3

題型⑩ 7

● 強化練習

9 1.2 2.4 3.1

4. 8.4 5. 5 6. 2、8

10 7.5 8. 14 9. 3

10. $\frac{40}{3}$ 11. 60 12. $\frac{30}{11}$

11 實力養成重點 3

題型① 35

題型② 3

● 強化練習

1. 82

2. 10

3. 30

12 隨堂基礎卷

一、選擇題

1.C 2.A 3.C 4.B 5.D

二、填充題

1. $10、36$ 2. $\frac{3}{2}$

3. 8 4. 8

13 5.4

6. $2\sqrt{3}$

7. (1) $5:2$; (2) $5:7$

8. (1) 2 ; (2) $1:4$

9. (1) 10 ; (2) $39:80$

三、計算題1.四邊形 $EFGH$ 的周長

$$= \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{HG} + \overline{HE}$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{CD} + \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{CD}$$

$$= \overline{AB} + \overline{CD} = 24$$

答: 24

2. 在 $\triangle ABK$ 中, $\overline{AH} : \overline{AK} = \overline{AD} : \overline{AB} = 2:5$

在 $\triangle AKG$ 中, $\overline{HE} : \overline{KG} = \overline{AH} : \overline{AK} = 2:5$

答: $2:5$ **14 每週一題**(1) 因為 $\overline{BA_2}$ 、 $\overline{CA_3}$ 、 $\overline{DA_4}$ 都與 $\overline{FH}$ 平行,

即 $\overline{BA_2} \parallel \overline{CA_3} \parallel \overline{DA_4}$,

又 B 、 C 、 D 、 E 為 $\overline{A_1F}$ 等分點,

所以 $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4}$

$$= \overline{A_1B} : \overline{BC} : \overline{CD} = 1:1:1。$$

(2) 由題意可知,

四邊形 $DFHA_4$ 為矩形 $\Rightarrow \overline{FH} = \overline{DA_4}$

$$\Rightarrow \overline{FH} \text{ 可擺書量即 } \overline{DA_4} \text{ 可擺書量}$$

由(1) $\triangle A_1A_4D$ 中, $\overline{DA_4} : \overline{CA_3}$

$$= \overline{A_4A_1} : \overline{A_3A_1} = 3:2,$$

$$\Rightarrow \overline{DA_4} \text{ 那層可擺書量為 } 200 \times \frac{3}{2} = 300 \text{ (本)},$$

亦即 $\overline{FH}$ 那層可擺 300 本, 故不能擺到 500 本。**1-3 相似形****15 實力養成重點 1**

題型 ① 55

題型 ② 3

● 強化練習 -----

1. 50

2. $\frac{2}{3}$

16 實力養成重點 2題型 ① (1) 80 ; (2) 85 ; (3) $1:2$; (4) 5.8 ; (5) 4

題型 ② (C)

題型 ③ (D)

題型 ④ $\frac{16}{3}$

● 強化練習 -----

17 1. (1) 1.25 ; (2) 80

2. (1) 56 ; (2) 145

3. (D) 4. 81 5. (B) 6. 9

18 實力養成重點 3題型 ① $1:3$ 題型 ② 13.5 題型 ③ 2

題型 ④ $\frac{10}{3}$

● 強化練習 -----

1. 21

2. 2

19 隨堂基礎卷**一、選擇題**

1. D 2. C 3. A 4. C 5. D

二、填充題

1. $\frac{5}{3}$

2. AA

3. $\frac{50}{7}$

20 4. 3 5. (1) 24 ; (2) $\frac{2}{3}$

6. $1:3$ 7. $\frac{15}{7}$

8. 1.25 、 11

9. (1) $2:1$; (2) $2:3$; (2) 3

三、計算題

1. ...由題意可得 $\overline{AF} : \overline{AD} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AD} : \overline{AB}$

$$\Rightarrow 16:40=40:\overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 100$$

答: 100

2. $\angle B = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

答: 55° **21 每週一題**

(1) $\because \triangle AEF \cong \triangle ADF$

$$\therefore \angle EAF = \angle DAF$$

又因為 $\angle BAE = \angle DAF$,

所以 $\angle BAE = \angle DAF = \angle EAF$ 。

(2) $\because \angle BAC = \angle BAE + \angle EAF$

$$= \angle DAF + \angle EAF = \angle EAD, \angle C = \angle D$$

$$\therefore \triangle BAC \sim \triangle EAD \text{ (AA 相似性質)}$$

得 $\overline{BC} : \overline{ED} = \overline{AC} : \overline{AD}$

$$8:(2+2) = \overline{AC} : 3$$

$$8:4 = \overline{AC} : 3$$

$$4 \overline{AC} = 24, \overline{AC} = 6, \text{ 故 } \overline{AC} = 6。$$

1-4 相似形的應用**22 實力養成重點 1**題型 ① $2:3$

題型 ② 4

題型 ③ 6

題型 ④ 3.2

題型 ⑤ $\frac{2}{3}$

● 強化練習 -----

1. 4 : 5 **23** 2. 4 : 25 3. 1 : 4

4. 987 5. 4.8 6. 4.4

24 實力養成重點 2

題型① (1) $3\sqrt{2}$; (2) $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{3}{4}$

題型② 9

● 強化練習 -----

1. $5\sqrt{3}$ 、10

2. $\frac{5}{13}$ 、 $\frac{12}{13}$ 、 $\frac{12}{5}$

3. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

25 隨堂基礎卷

一、選擇題

1. D 2. D 3. B 4. D 5. C

二、填充題

1. (1) 15、9 ; (2) 25 : 9

2. 225

26 3. $6\sqrt{2}$

4. 108

5. (1) $10+10\sqrt{3}$; (2) $25\sqrt{3}$

6. 5

7. 1.8

三、計算題

1. 設河寬 $\overline{AB} = x$ (m)

$$\because \triangle ABD \sim \triangle ACE \quad \therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CE}$$

$$x : (x+8) = 6 : 18, 6x+48=18x, 12x=48, x=4$$

答：4m

27 每週一題

(1) $\because \overline{DE}$ 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 $\Rightarrow \overline{EA} = \overline{EB}$

$\therefore \triangle EAB$ 為等腰三角形 $\Rightarrow \angle EAB = \angle EBA = \angle ABC$

故 $\angle AEC = \angle EAB + \angle EBA = 2\angle ABC$

(外角定理)。

(2) 依題意可知 $\angle FEH = \angle FEA = \frac{1}{2}\angle AEC$ ，

又由(1)可知 $\angle AEC = 2\angle ABC \Rightarrow \angle FEH = \angle ABC$ 。

$\because \overline{DE}$ 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，且 $\overline{FH} \perp \overline{BC}$

$\therefore \angle EDB = \angle EHF = 90^\circ$

故 $\triangle BED \sim \triangle EFH$ (AA 相似性質)。

第 2 章 圓的性質

2-1 圓形及點、直線與圓之間的關係

28 實力養成重點 1

題型① (C)

題型② (1) 8π ; (2) 80π

題型③ (1) 50 ; (2) $25\pi - 50$

題型④ 8

● 強化練習 -----

1. 6π 、 54π

2. (1) 162 ; (2) $81\pi - 162$

3. 45

29 實力養成重點 2

題型① (C)

題型② $7 < r < 9$

題型③ (1) 3 ; (2) 9

題型④ (1) L_1 ; (2) L_2 ; (3) L_3

30 題型⑤ L_2 、 L_1 、 L_3

題型⑥ 26

題型⑦ 3

題型⑧ 12

題型⑨ 10

題型⑩ (9, 0)

● 強化練習 -----

31 1. (1) 外 ; (2) 上 ; (3) 內

2. $0 \leq t < 6$

3. 4、16

4. (1) 2 ; (2) N

5. 10

6. 52π

7. 14

8. 3

9. (-6, 3.5)

32 實力養成重點 3

題型① 9

題型② 30

題型③ (1) 145 ; (2) 168

題型④ $\frac{48}{5}$

● 強化練習 -----

33 1. 20π 2. 5 3. 2.4

4. 15

5. 60

6. $\frac{24}{5}$

34 隨堂基礎卷

一、選擇題

1. A 2. A 3. B 4. B 5. D

二、填充題

1. 2

2. 2

3. 7

4. $4\pi - 8$

35 5. 20

6. (1) 弦 ; (2) 直徑 ; (3) 扇形 ; (4) 弓形

7. (1) 180 ; (2) 34 ; (3) 60 ; (4) $\frac{120}{13}$

三、計算題

1. 扇形面積 $= 9^2 \times \pi \times \frac{6\pi}{2 \times 9 \times \pi} = 27\pi$

答： 27π

2. 設 $\overline{OC} = x$ 公分，則 $\overline{OM} = (x-1)$ 公分

$$\overline{CM} = 6 \div 2 = 3$$

$$\therefore x^2 = (x-1)^2 + 9$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 + 9 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

故圓 O 的周長 $= 2 \times \pi \times 5 = 10\pi$ (公分)

答： 10π 公分

36 每週一題

(1) $\because \overline{OG}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距，且 $\overline{AO} = \overline{BO}$

$$\therefore \overline{AG} = \overline{BG}$$

$\because \overline{OG}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距

$$\therefore \overline{CG} = \overline{DG}$$

$$\text{因此 } \overline{AG} - \overline{CG} = \overline{BG} - \overline{DG},$$

$$\text{故 } \overline{AC} = \overline{BD}.$$

(2) 因為四邊形 $AEFB$ 為梯形，且 O 、 G 分別為 $\overline{EF}$ 、 $\overline{AB}$ 中點，

$$\text{所以 } \overline{OG} = \frac{1}{2}(4+6)=5,$$

$$\overline{CG} = \frac{1}{2} \times 24 = 12,$$

$$\text{則圓 } O \text{ 半徑} = \overline{OC}$$

$$= \sqrt{\overline{OG}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\text{故圓 } O \text{ 的面積} = 13 \times 13 \times \pi = 169\pi.$$

2-2 弧與圓周角**37 實力養成重點 1**

題型① (1) 20 ; (2) 40 ; (3) 60

題型② 75

題型③ (1) 120 ; (2) 6π 、 4π

題型④ $\frac{65\pi}{6}$

38 題型⑤ 120

題型⑥ (1) 60 ; (2) 50

題型⑦ 250

題型⑧ (1) 90 ; (2) 90 ; (3) 80

● 強化練習 -----

1. 180 2. 60

39 3. 130 4. 3π

5. $\frac{11\pi}{2}$

6. 65 7. 50

8. 70 9. 8

10. 60、120

40 隨堂基礎卷

一、選擇題

1. C 2. A 3. B 4. C 5. A

二、填充題

1. 66

2. 155

3. 120、30、60

41 4. 70 5. 180

6. 2π 7. $\frac{15}{4}\pi$ 8. 75

三、計算題

1. $\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 B 點 $\therefore \angle DBO = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$
 $\angle BOD = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ = 84^\circ$

答： 84°

42 每週一題

$$\begin{aligned} (1) \text{ 依題意可知 } \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DE} : \widehat{AE} \\ = \overline{PQ} : \overline{QR} : \overline{RS} : \overline{ST} : \overline{TP'} \\ = 6 : 7 : 2 : 5 : 4 \end{aligned}$$

$$\text{設 } \widehat{AB} = 6r, \widehat{BC} = 7r, \widehat{CD} = 2r, \widehat{DE} = 5r,$$

$$\widehat{AE} = 4r, r \neq 0,$$

$$\text{則 } \angle EBD : \angle EBC = \frac{1}{2} \widehat{DE} : \frac{1}{2} \widehat{CDE}$$

$$= \widehat{DE} : (\widehat{CD} + \widehat{DE}) = 5r : 7r = 5 : 7.$$

(2) 由(1)可知， $\angle EGD : \angle BFD$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{DE} + \widehat{ABC}) : \frac{1}{2}(\widehat{AE} + \widehat{BCD})$$

$$= (\widehat{DE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}) : (\widehat{AE} + \widehat{BC} + \widehat{CD})$$

$$= (5r + 6r + 7r) : (4r + 7r + 2r)$$

$$= 18 : 13$$

第3章 推理證明與三角形的心**3-1 推理與證明****43 實力養成重點 1**

題型① (1) ASA ; (2) SAS

題型② AAS

題型③ (A)

題型④ $\overline{BC}$ 、 $\angle 2$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AC}$ 、SAS

44 題型⑤ $\angle C$ 、 $\angle E$ 、 $\overline{AE}$ 、AAS

題型⑥ $\angle CBE$ 、 $\angle DEB$ 、 $\angle DEB$

題型⑦ $\frac{24}{5}$

題型⑧ $(a+b+c)(a-b-c)=0$

$$\Rightarrow a^2 - (b+c)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = (b+c)^2$$

$\therefore b+c$ 為 a^2 的因數

故 $b+c$ 可以整除 a^2 。

45 題型⑨ $a+b>0 \Rightarrow b>-a$

$$\text{又 } a<0 \Rightarrow b>-a>0$$

$$\Rightarrow |b|=b>-a=|a|$$

故 $|a|<|b|$ 。

題型⑩ $\overline{BD}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{CD}$ 、SSS

● 強化練習 -----

1. (D)

2. $\overline{AD}$ 、 $\angle 2$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AC}$ 、SAS

3. 16

46 4. $\overline{AC}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AD}$ 、等腰

5. $\frac{16}{7}$ 6. $b>a>c$,

7. $\sqrt{7}$

8. (C) 9. $5\sqrt{3}$

47 隨堂基礎卷

一、選擇題

1. C 2. C 3. B 4. D 5. A

二、填充題

1. 50

2. 12

3. 24 ;

48 4. (1) 2 ; (2) 8

5. 800

6. $\overline{AB}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\angle ABC$ 、 $\angle DBC$ 、 SAS 7. (1) $\triangle ABC$ 中, $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$;(2) $\overline{DE} = \overline{DF}$

三、計算題

1. $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$ $\therefore \angle A = \angle E$ (內錯角相等)在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDF$ 中 $\therefore \angle A = \angle E, \angle B = \angle D$ $\therefore \triangle ABC \sim \triangle EDF$ (AA 相似性質)又 $\overline{BC} = 2\overline{DF}$, 故 $\overline{AB} = 2\overline{DE}$

(對應邊成比例)

2. $\because n$ 為正整數 $\therefore n$ 可為偶數或奇數(1) 當 n 為偶數時, $n+1$ 為奇數,
則 $n(n+1) = \text{偶} \times \text{奇}$, 為偶數。(2) 當 n 為奇數時, $n+1$ 為偶數,
則 $n(n+1) = \text{奇} \times \text{偶}$, 為偶數。故 $n(n+1)$ 為偶數。**49 每週一題**(1) 由圖可知, $\angle AFE = \angle BFD$ (對頂角相等),
又 $\angle 1 = \angle 2$,故 $\angle 1 + \angle AFE = 90^\circ = \angle 2 + \angle BFD$,因此 $\angle BDF = \angle AEF = 90^\circ$,即 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。(2) $\because \angle DAB = \angle DBA$ $\therefore \triangle ADB$ 是等腰三角形, 得 $\overline{DA} = \overline{DB}$ 在 $\triangle ADC$ 與 $\triangle BDF$ 中,因為 $\angle ADC = \angle BDF = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2, \overline{DA} = \overline{DB}$,所以 $\triangle ADC \cong \triangle BDF$ (ASA 全等性質)。因此 $\overline{CD} = \overline{DF}$ (對應邊相等)。

3-2 三角形的外心、內心與重心

50 實力養成重點 1

題型 ① A

題型 ② (B)

題型 ③ 15

題型 ④ 14

題型 ⑤ $\frac{25}{2}$ 題型 ⑥ (1) $\frac{25}{8}$; (2) $\frac{625}{48}$ **51 題型 ⑦** (1) 60; (2) 160; (3) 140

題型 ⑧ 64

● 強化練習

1. (D)

2. (C)

3. 1 : 1 : 1

4. (1) 19.5; (2) 13

52 5. 24

6. 36

7. 5

8. (1) 50; (2) 108

9. (B)

10. 140

11. 80 或 100

53 實力養成重點 2

題型 ① (D)

題型 ② 1

題型 ③ $2 : \sqrt{3} : 1$

題型 ④ 24

題型 ⑤ $\frac{3}{2}$

題型 ⑥ 4

54 題型 ⑦ 3.5

題型 ⑧ (1) 22.5; (2) 135

題型 ⑨ 105

題型 ⑩ 30

● 強化練習

1. 6

2. $1 : 2 : \sqrt{3}$

3. (1) 3; (2) 3

55 4. $\frac{21}{4}$ 5. 4π

6. 18

7. (1) 130; (2) 115

8. (1) 135; (2) 141

9. 80

56 實力養成重點 3

題型 ① 22.5

題型 ② (1) 2; (2) $2\sqrt{7}$

題型 ③ (1) 16; (2) 48; (3) 16

題型 ④ (1) 5; (2) 10

題型 ⑤ 5、2

題型 ⑥ 60

● 強化練習

57 1. (1) 9; (2) 242. $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

3. 4

4. 2 : 3

5. $\frac{13}{3}$ 6. $18\sqrt{3}$ 7. $12\sqrt{3}$

58 隨堂基礎卷**一、選擇題**

1.D 2.D 3.B 4.C 5.D

二、填充題

1. 130

2. 162

3. 40

4. 64

59 5. (1) 24 ; (2) 2 ; (3) 4 : 3 : 56. 36π 7. 1308. $\frac{20}{3}$

9. 48 10. 2

三、計算題1. 因 F 為 $\triangle ABC$ 的重心故 $\triangle ABF$ 的面積 = $2\triangle BEF$ 的面積 = 12

答 : 12

2. O 為 $\overline{AC}$ 的中點, G 為直角 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\overline{OG} = \frac{1}{3} \overline{BO} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{6} \overline{AC} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

答 : $\frac{7}{3}$ **60 每週一題**(1) 將三點以坐標形式表示為 $A(6, 8)$ 、 $B(30, 8)$ 、 $C(6, 26)$ 。

三邊長分別為 18、24、30，

又因為 $18^2 + 24^2 = 30^2$ ，所以此 $\triangle ABC$ 為直角三角形。

(2) 由(1)可知三邊長分別為 18、24、30，

內切圓半徑 = $\frac{1}{2} \times (\text{兩股和} - \text{斜邊長})$

$$= \frac{1}{2} \times (18 + 24 - 30) = 6$$

內切圓面積 = $6 \times 6 \times \pi = 36\pi$ 。



Notes

筆記欄



Notes

筆記欄