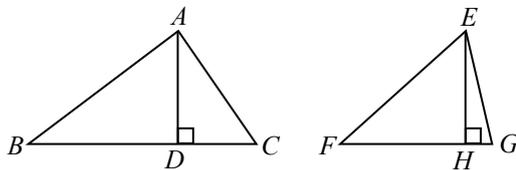


# 1-1 比例線段

## 重點 1 等高三三角形面積與邊長的關係

■ 等高三三角形的面積比等於底邊長的比：

如圖， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{EH} \perp \overline{FG}$ ，若 $\overline{AD} = \overline{EH}$ ，  
則 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle EFG$ 面積 =  $\overline{BC} : \overline{FG}$ 。



### 範例 1

如圖， $\triangle ABC$ 中， $E$ 為 $\overline{BC}$ 中點， $\overline{BD} = 3$ ，  
 $\overline{DE} = 1$ ，則下列敘述何者正確？

- (A)  $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 的面積比是 3 : 4  
 (B)  $\triangle ABE$ 與 $\triangle ADE$ 的面積比是 4 : 1  
 (C)  $\triangle ABE$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比是 1 : 2  
 (D)  $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 的面積比是 7 : 1

解

$$\triangle ABD : \triangle ADC = \overline{BD} : \overline{DC}$$

$$= 3 : 1$$

$$\triangle ABE : \triangle ADE = \overline{BE} : \overline{DE}$$

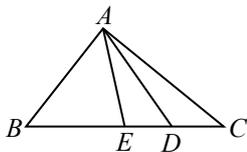
$$= 2 : 1$$

$$\triangle ABE : \triangle ABC = \overline{BE} : \overline{BC} = 2 : 4 = 1 : 2$$

$$\triangle ABC : \triangle ADE = \overline{BC} : \overline{DE} = 4 : 1$$

故選(C)

答：(C)。



### 範例 2

如圖， $\triangle ADC$ 的面積為 4， $\triangle ABC$ 的面積為 7，  
若 $\overline{AD} : \overline{DB}$ 的比值為  $a$ ， $\overline{AB} : \overline{AD}$ 的比值為  $b$ ，  
則下列敘述何者正確？

- (A)  $a = b$  (B)  $a > b$  (C)  $ab = 2$  (D)  $ab > 2$

解

$$\triangle ADC \text{ 面積} : \triangle BCD \text{ 面積}$$

$$= \overline{AD} : \overline{DB} = 4 : 3$$

$$\therefore a = \frac{4}{3}$$

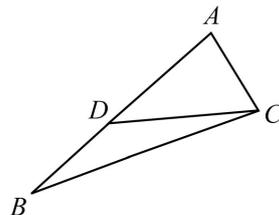
$$\triangle ABC \text{ 面積} : \triangle ADC \text{ 面積}$$

$$= \overline{AB} : \overline{AD} = 7 : 4$$

$$\therefore b = \frac{7}{4}$$

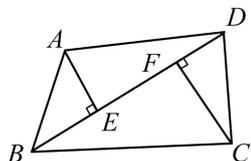
$$\text{故 } ab = \frac{4}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{3}$$

答：(D)。



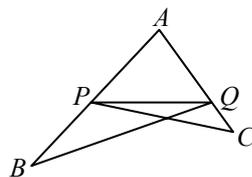
### 練習 1

如圖，四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AE} \perp \overline{BD}$  於  $E$  點，  
 $\overline{CF} \perp \overline{BD}$  於  $F$  點， $\overline{AE} = 4$ ，且 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$   
的面積比是 3 : 4，則 $\overline{CF} = \underline{\quad \frac{16}{3} \quad}$ 。



### 練習 2

如圖， $\overline{AP} : \overline{PB} = 6 : 5$ ， $\overline{AQ} : \overline{QC} = 5 : 2$ ，則 $\triangle$   
 $PQB$ 面積： $\triangle APQ$ 面積： $\triangle PQC$ 面積 =  
25 : 30 : 12。

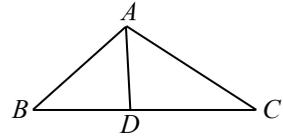




## 重點 2 三角形的內分比

### ■ 三角形的內分比性質：

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$  為  $\angle BAC$  的角平分線，交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，則  $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 。



### 範例 1

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$  為  $\angle BAC$  的角平分線，交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，若  $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{AC} = 20$ ， $\overline{CD} = 16$ ，求  $\overline{BD}$ 。

**解**

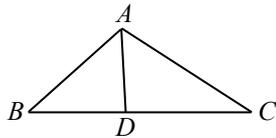
$\because \overline{AD}$  為  $\angle BAC$  的角平分線

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$16 : 20 = \overline{BD} : 16$$

$$\overline{BD} = 12.8$$

答：12.8。



### 範例 2

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$  為  $\angle BAC$  的角平分線，交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，若  $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\triangle ABC$  的面積為 78，求  $\triangle ADC$  的面積。

**解**

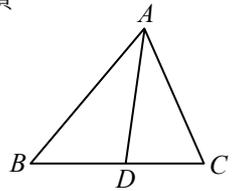
$\because \overline{AD}$  為  $\angle BAC$  的角平分線

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$= 14 : 12 = 7 : 6$$

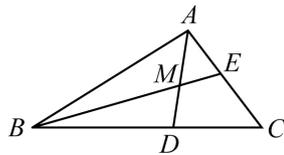
$$\triangle ADC \text{ 的面積為 } 78 \times \frac{6}{7+6} = 36$$

答：36。



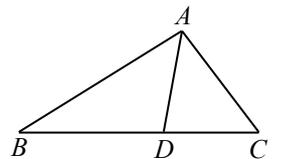
### 練習 1

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$  分別為  $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$  的角平分線，若  $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AC} = 16$ ， $\overline{BC} = 30$ ，則  $\overline{AM} : \overline{MD} =$  4 : 3。



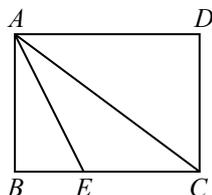
### 練習 2

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$  為  $\angle BAC$  的角平分線，交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，若  $\overline{AB} = 18$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\triangle ABD$  的面積為 24，則  $\triangle ABC$  的面積為 40。

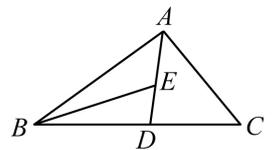


### 回家作業

1. 如圖，矩形  $ABCD$  中， $\overline{AC}$  為對角線， $\overline{AE}$  為  $\angle BAC$  的角平分線，交  $\overline{BC}$  於  $E$  點，若  $\overline{AB} = 18$ ， $\overline{BC} = 24$ ，則  $\overline{EC} =$  15。



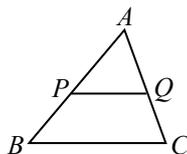
2. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$  分別為  $\angle BAC$ 、 $\angle ABD$  的角平分線，若  $\overline{AB} = 20$ ， $\overline{AC} = 16$ ， $\overline{BC} = 27$ ， $\triangle ABD$  的面積為 70，則  $\triangle ABE$  的面積為 40。



### 重點 3 平行線截比例線段

#### 1. 比例線段：

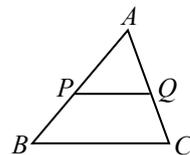
如圖， $\triangle ABC$  中，若  $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，  
則稱  $\overline{AP}$ 、 $\overline{PB}$ 、 $\overline{AQ}$ 、 $\overline{QC}$  為比例線段。



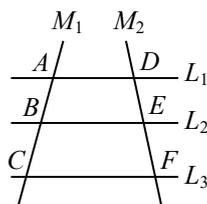
#### 2. 平行線截比例線段：

(1) 如圖， $\triangle ABC$  中， $P$ 、 $Q$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上的一點，若  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則：

- ①  $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 。
- ②  $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。
- ③  $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 。
- ④  $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。



(2) 如圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，分別與  $M_1$  交於  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點，  
與  $M_2$  交於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，則  $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



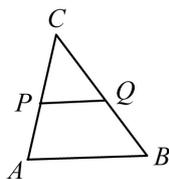
#### 範例 1

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ ，且  $\overline{CP} : \overline{PA} = 6 : 5$ ，  
 $\overline{QB} = 30$ ，求  $\overline{CQ}$ 。

解

$$\begin{aligned} \because \overline{PQ} \parallel \overline{AB} \\ \therefore \overline{CP} : \overline{PA} &= \overline{CQ} : \overline{QB} \\ 6 : 5 &= \overline{CQ} : 30 \\ \overline{CQ} &= 36 \end{aligned}$$

答：36。



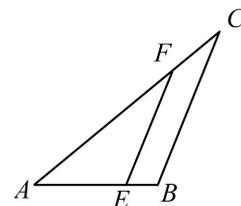
#### 範例 2

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，且  $\overline{AE} = 2.4$ ，  
 $\overline{EB} = 0.8$ ， $\overline{EF} = 3$ ，求  $\overline{BC}$ 。

解

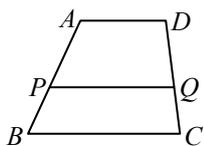
$$\begin{aligned} \because \overline{EF} \parallel \overline{BC} \\ \therefore \overline{AE} : \overline{AB} &= \overline{EF} : \overline{BC} \\ 2.4 : (2.4 + 0.8) &= 3 : \overline{BC} \\ \overline{BC} &= 4 \end{aligned}$$

答：4。



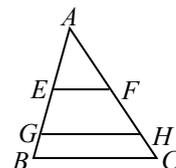
#### 練習 1

如圖，四邊形  $ABCD$  為梯形， $\overline{PQ}$  分別與  $\overline{AD}$ 、  
 $\overline{BC}$   
兩底平行，且  $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ ， $\overline{DC} = 20$ ，則  
 $\overline{QC} =$  8。



#### 練習 2

如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{BC}$ ，若  
 $\overline{AE} = 5$ ， $\overline{EG} = 4$ ， $\overline{GB} = 2$ ， $\overline{AC} = 13$ ，  
則  $\overline{FH} =$   $\frac{52}{11}$ 。



### 回家作業

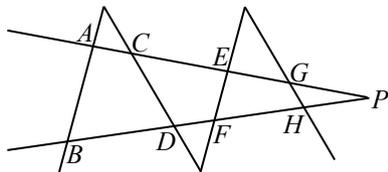
1. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ， $\overline{CD} \parallel \overline{GH}$ ，則下列敘述何者正確？ (D)

(A)  $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$

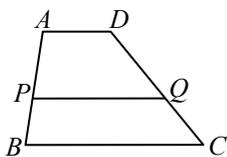
(B)  $\frac{\overline{CE}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FH}}$

(C)  $\frac{\overline{AP}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{DP}}$

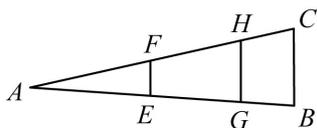
(D)  $\frac{\overline{CG}}{\overline{GP}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{HP}}$



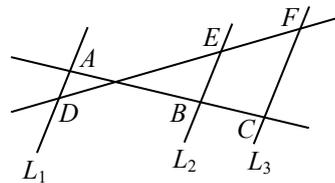
2. 如圖，梯形  $ABCD$  中， $\overline{PQ}$  分別與  $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$  兩底平行，且  $\overline{AB} : \overline{DC} = 3 : 4$ ， $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ ， $\overline{QC} = 24$ ，則  $\overline{AP} =$  27。



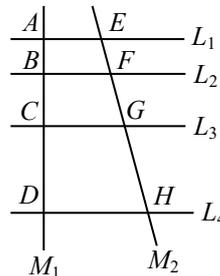
3. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{BC}$ ，且  $\overline{AE} : \overline{EG} = 4 : 3$ ， $\overline{FH} : \overline{HC} = 5 : 3$ ，則  $\overline{AE} : \overline{EG} : \overline{GB} =$  20 : 15 : 9。



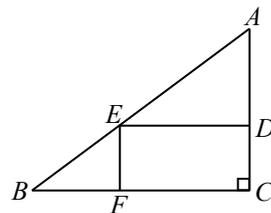
4. 如圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，若  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{EF} = 4$ ，則  $\overline{DF} =$  12。



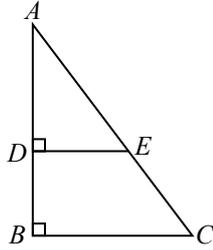
5. 如圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ ， $M_1$ 、 $M_2$  為截線，若  $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 2 : 3 : 5$ ， $\overline{EH} = 15$ ，則  $\overline{FH} =$  12。



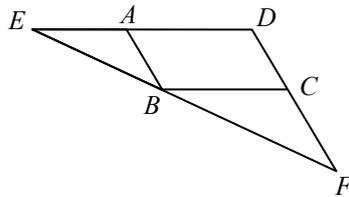
6. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點分別在  $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$  上，且四邊形  $DEFC$  為長方形， $\overline{DE} = 2\overline{EF}$ 。若  $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則長方形  $DEFC$  的周長為  $\frac{36}{5}$ 。



7. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$  於  $D$  點，若  $\overline{AD} = 12$ ， $\overline{BD} = x + 3$ ， $\overline{CE} = 10$ ， $\overline{AE} = 3x$ ，則  $\triangle ABC$  的面積為 150。

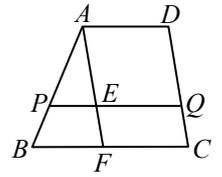


8. 如圖， $\triangle DEF$  中， $\overline{AB} \parallel \overline{DF}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ，若  $\overline{AE} = 12$ ， $\overline{CD} = 9$ ， $\overline{CF} = 12$ ，則四邊形  $ABCD$  的周長為 50。

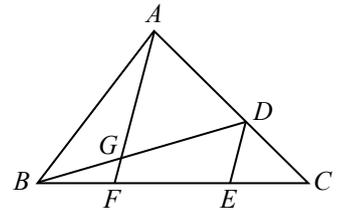


9.  $\triangle ABC$  中， $D$  為  $\overline{AB}$  中點， $F$  為  $\overline{BD}$  中點，過  $D$ 、 $F$  分別作  $\overline{BC}$  的平行線交  $\overline{AC}$  於  $E$ 、 $G$  兩點，則  $\overline{AC} : \overline{AG} =$  4 : 3。

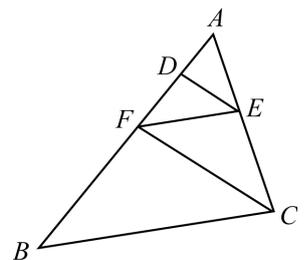
10. 如圖，梯形  $ABCD$  中， $\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AF} \parallel \overline{DC}$ ，若  $\overline{AE} : \overline{EF} = 3 : 2$ ， $\overline{AD} = 12$ ， $\overline{BC} = 22$ ，則  $\overline{PQ} =$  18。



11. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{DE} \parallel \overline{AF}$ ， $\overline{BF} = \overline{EC} = 10$ ， $\overline{EF} = 15$ ， $\overline{BD} = 30$ ，則  $\overline{DE} : \overline{AF} =$  2 : 5， $\overline{BG} =$  12。



12. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$ ， $\overline{FE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3$ ，若  $\overline{DF} = 18$ ，則  $\overline{AD} =$  12， $\overline{FB} =$  45。

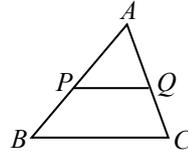


### 重點 4 由比例線段判別平行線

#### 1. 比例線段與平行的判別：

如圖， $\triangle ABC$  中， $P$ 、 $Q$  兩點分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上，

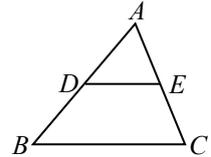
- ① 若  $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，則  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- ② 若  $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- ③ 若  $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



#### 2. 三角形兩邊中點連線性質：

如圖， $\triangle ABC$  中：

- (1) 若  $D$ 、 $E$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  的中點，則  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且  $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 。
- (2) 若  $D$  為  $\overline{AB}$  的中點，且  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則  $E$  為  $\overline{AC}$  的中點。



#### 3. 坐標平面上線段的中點坐標：

若  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  為坐標平面上的相異兩點，則  $\overline{AB}$  的中點坐標為  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ 。

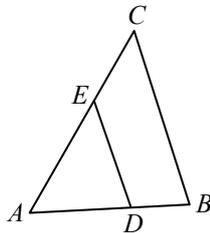
#### 範例 1

如圖， $\triangle ABC$  中，若  $\overline{AD} = 28$ ， $\overline{DB} = 16$ ， $\overline{AE} = 42$ ， $\overline{EC} = 24$ ，則  $\overline{DE}$  與  $\overline{BC}$  是否平行？

**解**

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AD} : \overline{DB} &= 28 : 16 = 7 : 4 \\ \overline{AE} : \overline{EC} &= 42 : 24 = 7 : 4 \\ \therefore \overline{DE} &\parallel \overline{BC} \end{aligned}$$

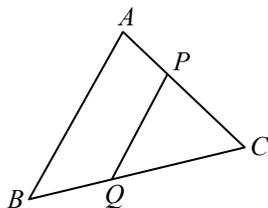
答：是。



#### 練習 1

如圖， $\triangle ABC$  中，若  $\overline{AP} = 6$ ， $\overline{AC} = 15$ ， $\overline{QC} = 12$ ， $\overline{BC} = 20$ ，則  $\overline{PQ}$  與  $\overline{BC}$  是否平行？

是



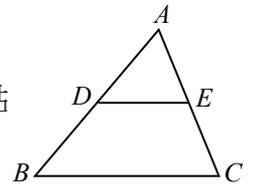
#### 範例 2

如圖， $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  的中點，若  $\overline{BC} = 28$ ，求  $\overline{DE}$ 。

**解**

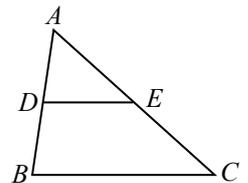
$$\begin{aligned} \therefore D、E \text{ 分別為 } \overline{AB}、\overline{AC} \text{ 的中點} \\ \therefore \overline{DE} &= \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 28 = 14 \end{aligned}$$

答：14。



#### 練習 2

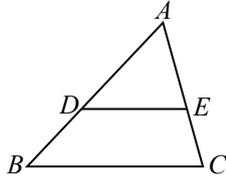
如圖， $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  的中點，若  $\overline{AB} + \overline{AC} = 30$ ， $\overline{DE} = 12$ ，求四邊形  $DECB$  的周長為 51。



**回家作業**

1. 如圖， $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$  兩點分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上，下列哪個條件無法推得  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ？

- (C)
- (A)  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$   
 (B)  $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$   
 (C)  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$   
 (D)  $\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$



2.  $\triangle ABC$  中，直線  $L$  交  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  於  $P$ 、 $Q$  兩點，若  $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{AQ} = 27$ ， $\overline{AP} = 18$ ，則下列哪一個條件可使得直線  $L$  平行  $\overline{BC}$ ？

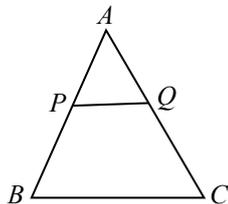
- (B)
- (A)  $\overline{QC} = 24$       (B)  $\overline{AC} = 45$   
 (C)  $\overline{PQ} = 18$       (D)  $\overline{BC} = 48$

3. 坐標平面上有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四點， $B$  點為  $\overline{AC}$  的中點， $D$  點為  $\overline{AB}$  的中點，若  $A(-5, 7)$ 、 $C(3, -1)$ ，則  $D$  點的坐標為

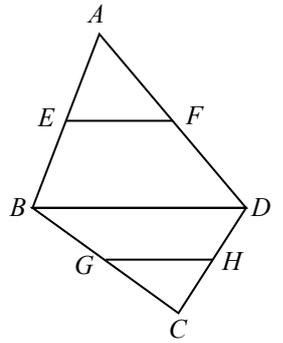
(-3, 5)。

4. 如圖， $\triangle ABC$  中，若  $\overline{AB} = 40$ ， $\overline{PB} = 22$ ， $\overline{AQ} = 18$ ， $\overline{QC} = 24$ ，則  $\overline{PQ}$  是否平行於  $\overline{BC}$ ？

否



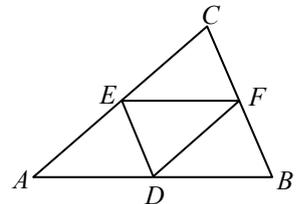
5. 如圖，四邊形  $ABCD$  中， $E$ 、 $F$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$  的中點， $G$ 、 $H$  分別為  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$  的中點，若  $\overline{GH} = 12$  公分，求  $\overline{EF} + \overline{BD} =$  \_\_\_\_\_。



6. 在坐標平面上，有平行四邊形  $ABCD$ ， $B$  點、 $C$  點、 $D$  點的坐標分別為  $(7, 4)$ 、 $(10, 8)$ 、 $(5, 6)$ ，則對角線交點  $M$  的坐標為 \_\_\_\_\_。

(6, 5)。

7. 如圖， $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$ 、 $F$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$  的中點，若  $\overline{DE} = 12$ ， $\overline{DF} = \overline{EF} = 17$ ，則  $\triangle ABC$  的周長為 \_\_\_\_\_。



8. 如圖， $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  的中點， $F$ 、 $G$  分別為  $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$  的中點，若  $\overline{DE} = 16$ ，則  $\overline{FG} =$  \_\_\_\_\_。

