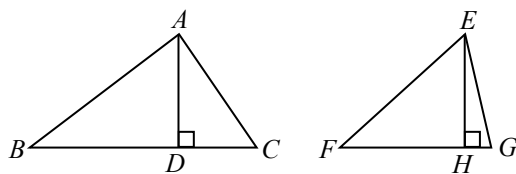


1-1 比例線段

重點 1 等高三角形面積與邊長的關係

■ 等高三角形的面積比等於底邊長的比：

如圖， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{EH} \perp \overline{FG}$ ，若 $\overline{AD} = \overline{EH}$ ，
則 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle EFG$ 面積 = $\overline{BC} : \overline{FG}$ 。



範例 1

如圖， $\triangle ABC$ 中， E 為 $\overline{BC}$ 中點， $\overline{BD} = 3$ ， $\overline{DE} = 1$ ，則下列敘述何者正確？

- (A) $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 的面積比是 3 : 4
(B) $\triangle ABE$ 與 $\triangle ADE$ 的面積比是 4 : 1
(C) $\triangle ABE$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比是 1 : 2
(D) $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 的面積比是 7 : 1

解

$$\triangle ABD : \triangle ADC = \overline{BD} : \overline{DC}$$

$$= 3 : 1$$

$$\triangle ABE : \triangle ADE = \overline{BE} : \overline{DE}$$

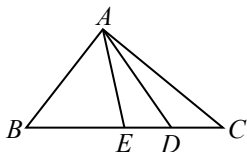
$$= 2 : 1$$

$$\triangle ABE : \triangle ABC = \overline{BE} : \overline{BC} = 2 : 4 = 1 : 2$$

$$\triangle ABC : \triangle ADE = \overline{BC} : \overline{DE} = 4 : 1$$

故選(C)

答：(C)。



範例 2

如圖， $\triangle ADC$ 的面積為 4， $\triangle ABC$ 的面積為 7，
若 $\overline{AD} : \overline{DB}$ 的比值為 a ， $\overline{AB} : \overline{AD}$ 的比值為 b ，
則下列敘述何者正確？

- (A) $a = b$ (B) $a > b$ (C) $ab = 2$ (D) $ab > 2$

解

$$\triangle ADC \text{ 面積} : \triangle BCD \text{ 面積}$$

$$= \overline{AD} : \overline{DB} = 4 : 3$$

$$\therefore a = \frac{4}{3}$$

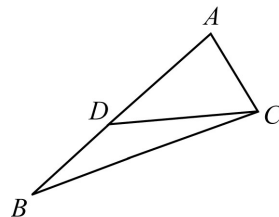
$$\triangle ABC \text{ 面積} : \triangle ADC \text{ 面積}$$

$$= \overline{AB} : \overline{AD} = 7 : 4$$

$$\therefore b = \frac{7}{4}$$

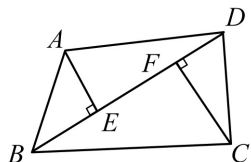
$$\text{故 } ab = \frac{4}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{3}$$

答：(D)。



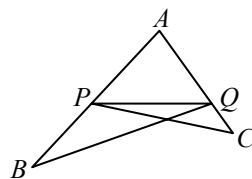
練習 1

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ 於 E 點，
 $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ 於 F 點， $\overline{AE} = 4$ ，且 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$
的面積比是 3 : 4，則 $\overline{CF} =$ _____。



練習 2

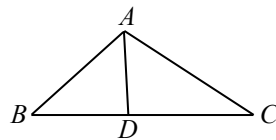
如圖， $\overline{AP} : \overline{PB} = 6 : 5$ ， $\overline{AQ} : \overline{QC} = 5 : 2$ ，則 $\triangle$
 PQB 面積： $\triangle APQ$ 面積： $\triangle PQC$ 面積 =
_____。



重點 2 三角形的內分比

■ 三角形的內分比性質：

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，交 $\overline{BC}$ 於 D 點，
則 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 。

**範例 1**

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，
交 $\overline{BC}$ 於 D 點，若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{AC} = 20$ ，
 $\overline{CD} = 16$ ，求 $\overline{BD}$ 。

解

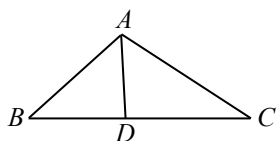
$\because \overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$16 : 20 = \overline{BD} : 16$$

$$\overline{BD} = 12.8$$

答：12.8。

**範例 2**

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，
交 $\overline{BC}$ 於 D 點，若 $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\triangle ABC$
的面積為 78，求 $\triangle ADC$ 的面積。

解

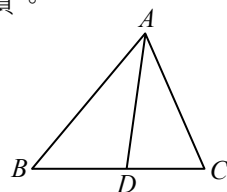
$\because \overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

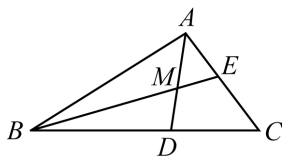
$$= 14 : 12 = 7 : 6$$

$$\triangle ADC \text{ 的面積為 } 78 \times \frac{6}{7+6} = 36$$

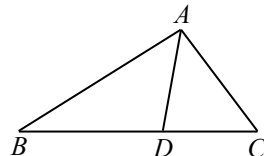
答：36。

**練習 1**

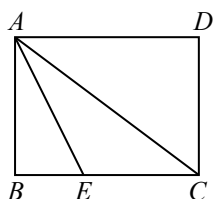
如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{BE}$ 分別為 $\angle BAC$ 、
 $\angle ABC$ 的角平分線，若 $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AC} = 16$ ，
 $\overline{BC} = 30$ ，則 $\overline{AM} : \overline{MD} =$ _____。

**練習 2**

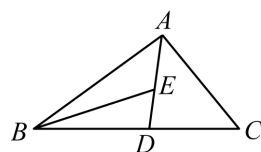
如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，
交 $\overline{BC}$ 於 D 點，若 $\overline{AB} = 18$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\triangle ABD$
的面積為 24，則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。

**回家作業**

1. 如圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AC}$ 為對角線， $\overrightarrow{AE}$ 為
 $\angle BAC$ 的角平分線，交 $\overline{BC}$ 於 E 點，若
 $\overline{AB} = 18$ ， $\overline{BC} = 24$ ，則 $\overline{EC} =$ _____。



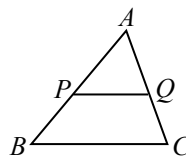
2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{BE}$ 分別為 $\angle BAC$ 、
 $\angle ABD$ 的角平分線，若 $\overline{AB} = 20$ ， $\overline{AC} = 16$ ，
 $\overline{BC} = 27$ ， $\triangle ABD$ 的面積為 70，則 $\triangle ABE$ 的
面積為 _____。



重點 3 平行線截比例線段

1. 比例線段：

如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，
則稱 $\overline{AP}$ 、 $\overline{PB}$ 、 $\overline{AQ}$ 、 $\overline{QC}$ 為比例線段。



2. 平行線截比例線段：

(1) 如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的一點，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則：

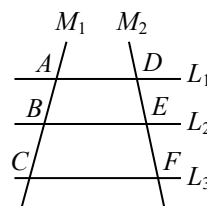
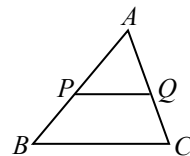
① $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 。

② $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。

③ $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 。

④ $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。

(2) 如圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，分別與 M_1 交於 A 、 B 、 C 三點，
與 M_2 交於 D 、 E 、 F 三點，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



範例 1

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ ，且 $\overline{CP} : \overline{PA} = 6 : 5$ ，
 $\overline{QB} = 30$ ，求 $\overline{CQ}$ 。

解

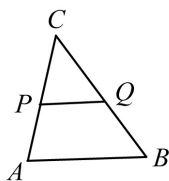
$$\because \overline{PQ} \parallel \overline{AB}$$

$$\therefore \overline{CP} : \overline{PA} = \overline{CQ} : \overline{QB}$$

$$6 : 5 = \overline{CQ} : 30$$

$$\overline{CQ} = 36$$

答：36。



範例 2

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AE} = 2.4$ ，
 $\overline{EB} = 0.8$ ， $\overline{EF} = 3$ ，求 $\overline{BC}$ 。

解

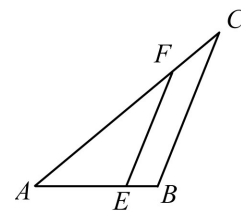
$$\because \overline{EF} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{AE} : \overline{AB} = \overline{EF} : \overline{BC}$$

$$2.4 : (2.4 + 0.8) = 3 : \overline{BC}$$

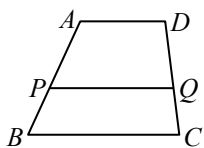
$$\overline{BC} = 4$$

答：4。



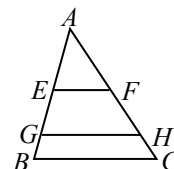
練習 1

如圖，四邊形 $ABCD$ 為梯形， $\overline{PQ}$ 分別與 $\overline{AD}$ 、
 $\overline{BC}$
兩底平行，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ ， $\overline{DC} = 20$ ，則
 $\overline{QC} =$ _____。



練習 2

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{BC}$ ，若
 $\overline{AE} = 5$ ， $\overline{EG} = 4$ ， $\overline{GB} = 2$ ， $\overline{AC} = 13$ ，
則 $\overline{FH} =$ _____。



回家作業

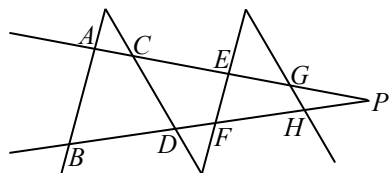
1. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ， $\overline{CD} \parallel \overline{GH}$ ，則下列敘述何者正確？_____

(A) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$

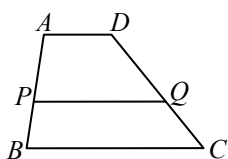
(B) $\frac{\overline{CE}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FH}}$

(C) $\frac{\overline{AP}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{DP}}$

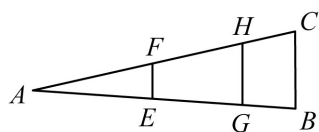
(D) $\frac{\overline{CG}}{\overline{GP}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{HP}}$



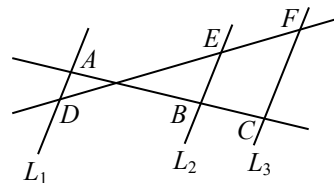
2. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{PQ}$ 分別與 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 兩底平行，且 $\overline{AB} : \overline{DC} = 3 : 4$ ， $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ ， $\overline{QC} = 24$ ，則 $\overline{AP} =$ _____。



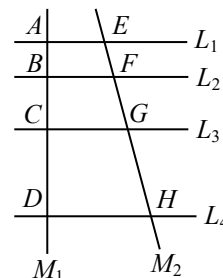
3. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AE} : \overline{EG} = 4 : 3$ ， $\overline{FH} : \overline{HC} = 5 : 3$ ，則 $\overline{AE} : \overline{EG} : \overline{GB} =$ _____。



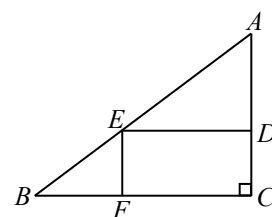
4. 如圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{EF} = 4$ ，則 $\overline{DF} =$ _____。



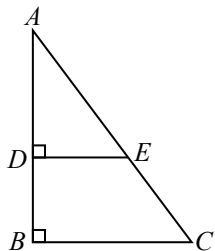
5. 如圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ ， M_1 、 M_2 為截線，若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 2 : 3 : 5$ ， $\overline{EH} = 15$ ，則 $\overline{FH} =$ _____。



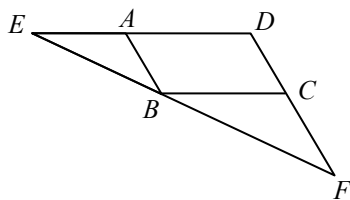
6. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 、 E 、 F 三點分別在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上，且四邊形 $DEFC$ 為長方形， $\overline{DE} = 2\overline{EF}$ 。若 $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則長方形 $DEFC$ 的周長為_____。



7. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 於 D 點，若 $\overline{AD} = 12$ ， $\overline{BD} = x + 3$ ， $\overline{CE} = 10$ ， $\overline{AE} = 3x$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。

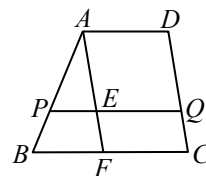


8. 如圖， $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{DF}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ，若 $\overline{AE} = 12$ ， $\overline{CD} = 9$ ， $\overline{CF} = 12$ ，則四邊形 $ABCD$ 的周長為 _____。

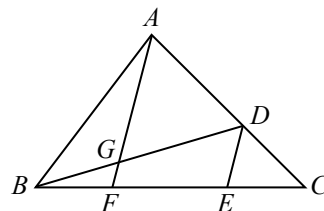


9. $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{AB}$ 中點， F 為 $\overline{BD}$ 中點，過 D 、 F 分別作 $\overline{BC}$ 的平行線交 $\overline{AC}$ 於 E 、 G 兩點，則 $\overline{AC} : \overline{AG} =$ _____。

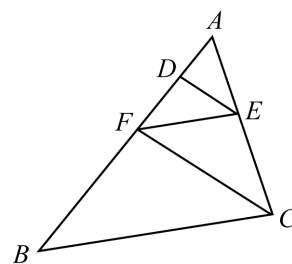
10. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AF} \parallel \overline{DC}$ ，若 $\overline{AE} : \overline{EF} = 3 : 2$ ， $\overline{AD} = 12$ ， $\overline{BC} = 22$ ，則 $\overline{PQ} =$ _____。



11. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{AF}$ ， $\overline{BF} = \overline{EC} = 10$ ， $\overline{EF} = 15$ ， $\overline{BD} = 30$ ，則 $\overline{DE} : \overline{AF} =$ _____， $\overline{BG} =$ _____。



12. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$ ， $\overline{FE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3$ ，若 $\overline{DF} = 18$ ，則 $\overline{AD} =$ _____， $\overline{FB} =$ _____。



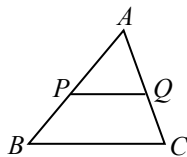
重點 4 由比例線段判別平行線**1. 比例線段與平行的判別：**

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，

① 若 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。

② 若 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。

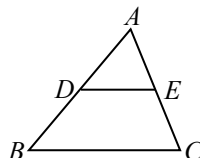
③ 若 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。

**2. 三角形兩邊中點連線性質：**

如圖， $\triangle ABC$ 中：

(1) 若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 。

(2) 若 D 為 $\overline{AB}$ 的中點，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 E 為 $\overline{AC}$ 的中點。

**3. 坐標平面上線段的中點坐標：**

若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 為坐標平面上的相異兩點，則 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ 。

範例 1

如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD} = 28$ ， $\overline{DB} = 16$ ， $\overline{AE} = 42$ ， $\overline{EC} = 24$ ，則 $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？

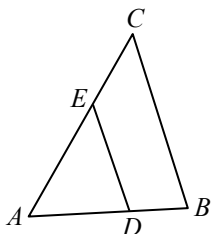
解

$$\because \overline{AD} : \overline{DB} = 28 : 16 = 7 : 4$$

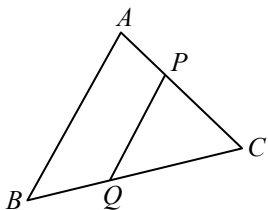
$$\overline{AE} : \overline{EC} = 42 : 24 = 7 : 4$$

$$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

答：是。

**練習 1**

如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AP} = 6$ ， $\overline{AC} = 15$ ， $\overline{QC} = 12$ ， $\overline{BC} = 20$ ，則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？

**範例 2**

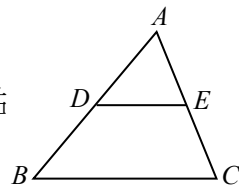
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，若 $\overline{BC} = 28$ ，求 $\overline{DE}$ 。

解

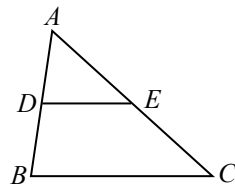
$\because D$ 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點

$$\therefore \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 28 = 14$$

答：14。

**練習 2**

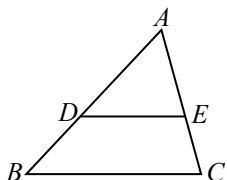
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，若 $\overline{AB} + \overline{AC} = 30$ ， $\overline{DE} = 12$ ，求四邊形 $DECB$ 的周長為_____。



回家作業

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，下列哪個條件無法推得 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ？

- (A) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$
 (B) $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$
 (C) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$
 (D) $\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$

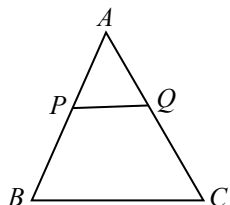


2. $\triangle ABC$ 中，直線 L 交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 P 、 Q 兩點，若 $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{AQ} = 27$ ， $\overline{AP} = 18$ ，則下列哪一個條件可使得直線 L 平行 $\overline{BC}$ ？_____

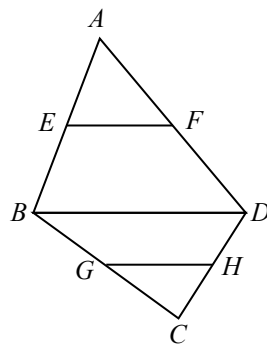
- (A) $\overline{QC} = 24$ (B) $\overline{AC} = 45$
 (C) $\overline{PQ} = 18$ (D) $\overline{BC} = 48$

3. 坐標平面上有 A 、 B 、 C 、 D 四點， B 點為 $\overline{AC}$ 的中點， D 點為 $\overline{AB}$ 的中點，若 $A(-5, 7)$ 、 $C(3, -1)$ ，則 D 點的坐標為_____。

4. 如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} = 40$ ， $\overline{PB} = 22$ ， $\overline{AQ} = 18$ ， $\overline{QC} = 24$ ，則 $\overline{PQ}$ 是否平行於 $\overline{BC}$ ？_____

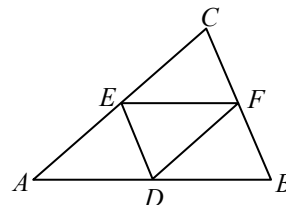


5. 如圖，四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 的中點， G 、 H 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，若 $\overline{GH} = 12$ 公分，求 $\overline{EF} + \overline{BD} =$ _____。



6. 在坐標平面上，有平行四邊形 $ABCD$ ， B 點、 C 點、 D 點的坐標分別為 $(7, 4)$ 、 $(10, 8)$ 、 $(5, 6)$ ，則對角線交點 M 的坐標為_____。

7. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點，若 $\overline{DE} = 12$ ， $\overline{DF} = \overline{EF} = 17$ ，則 $\triangle ABC$ 的周長為_____。



8. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點， F 、 G 分別為 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$ 的中點，若 $\overline{DE} = 16$ ，則 $\overline{FG} =$ _____。

